

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXXVII.

I *Ueber die normale Entzündungsgeschwindigkeit explosiver Gasgemische; von W. Michelson.*

(Hierzu Taf. II Fig. 1-6.)

Seit der annähernden Schätzung von Davy und den ersten numerischen Bestimmungen von Bunsen haben sich nur wenige Forscher mit der Entzündungsgeschwindigkeit von Gasgemischen beschäftigt. Es sind viele hierher gehörende Fragen noch nicht erledigt, und es scheint sogar ein Mangel an klaren Begriffen und genügend scharfen Definitionen vorhanden zu sein.

Die verschiedenen möglichen Arten der Verbrennung explosiver Gasgemische, und namentlich der physikalische Unterschied zwischen langsamer Verbrennung und Explosionswelle sind in der Arbeit der Herren Mallard und Le Chatelier¹⁾ ausführlich besprochen; wir wollen daher nicht darauf zurückkommen.

Vorliegende Arbeit bezieht sich ausschliesslich auf die Erscheinung der sogenannten normalen Verbrennung, d. h. auf diejenigen Fälle, wo die Reaction nur durch Wärmeleitung (und nicht durch Compression) von Ort zu Ort fortschreitet.

Da jedes Raumelement eines explosiven Gasgemisches schon alle zur Verbrennung nothwendigen Bestandtheile enthält, und die Reaction selbst im allgemeinen sehr schnell beendigt ist, so geschieht in jedem Augenblick die eigentliche Verbrennung bloß in einer sehr dünnen Schicht, welche wir der Kürze halber die „Verbrennungsfläche“ nennen wollen. Diese Fläche trennt die ganze in Betracht kommende Gasmasse in zwei Theile: einerseits befindet sich das noch nicht entzündete Gemisch, andererseits die in der Nähe

1) Mallard u. Le Chatelier, Ann. des Mines. (8) 4. p. 274. 1883.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVII.

der Fläche noch sehr erhitzten Verbrennungsproducte. Die Dicke dieser Verbrennungsschicht ist selbstverständlich nicht unendlich klein und hängt von der Geschwindigkeit der chemischen Reaction, vom Grade der Dissociation u. s. w. ab; bei allen wirklich explosiven Gemischen ist sie aber so gering, dass wir zu unseren Zwecken vollkommen berechtigt sind, sie als eine Fläche zu bezeichnen.

Beim Fortschreiten der Verbrennung bewegt sich diese Fläche gegen die unentzündeten Theile des Gases, kann aber im allgemeinen dabei auch ihre Form verändern. Um dennoch eine eindeutige und physikalisch völlig bestimmte Definition der Geschwindigkeit, mit welcher die Verbrennung fortschreitet, zu erhalten, bleibt uns offenbar blos ein Weg: Wir betrachten zwei unendlich nahe Lagen der Verbrennungsfläche, welche den Zeitpunkten t und $t + dt$ entsprechen. dn sei die an jeder Stelle normal zur ursprünglichen Lage der Fläche gemessene Verschiebung derselben. Das Verhältniss $u = dn/dt$ nennen wir normale Entzündungsgeschwindigkeit des betreffenden Gasgemisches.

Selbstverständlich setzt diese Definition voraus, dass die unverbrannten Theile des Gases bis zum Augenblick der Entzündung sich in vollkommener Ruhe befinden, oder, da diese Bedingung in der Wirklichkeit nie erfüllt ist, ist es zweckmässiger, zu sagen, dass dabei blos die relative Verschiebung der Verbrennungsfläche gegen das unentzündete Gas gemeint wird.

Die so definirte Geschwindigkeit der Entzündung hängt von dem Drucke und der Zusammensetzung des explosiven Gases ab und ist für den Zustand desselben eine ebenso charakteristische Grösse, wie etwa die Wärmeleitungsfähigkeit, die Dichte oder die spezifische Wärme.

Der Allgemeinheit wegen müsste allerdings noch vorausgesetzt werden, dass die Entzündungsgeschwindigkeit auch von der Form der Verbrennungsfläche, namentlich von deren Krümmung abhängt und daher sogar in einem homogenen Gemisch von Punkt zu Punkt verschieden sein könnte.

Aus der vorliegenden Untersuchung scheint aber hervorzugehen, dass diese vermuthliche Abhängigkeit von der Krümmung nur unbedeutende Aenderungen in der Entzün-

Die Entzündungsgeschwindigkeit verursachen kann, welche die Grenzen der zufälligen Beobachtungsfehler nicht überschreiten und daher bis jetzt nicht nachweisbar sind. Wir wollen daher im Folgenden annehmen, dass die normale Entzündungsgeschwindigkeit von der Krümmung der Verbrennungsfläche unabhängig sei.

Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entzündung experimentell zu messen, bieten sich von selbst zwei wesentlich verschiedene Methoden: entweder man entzündet ein ursprünglich ruhendes Gasgemisch an einer Stelle und beobachtet (sei es unmittelbar oder durch mechanische, electriche, photographische Selbstregistrirmethoden) das Fortschreiten der Flamme von Ort zu Ort, oder anderseits man gibt den entzündbaren Gasen eine derartige bekannte fortschreitende Bewegung, dass die Flamme sich unbeweglich erhalte, und misst auf diese Weise bloß die relative Verschiebung der Gase gegen die Flamme.

Die erstgenannte Methode, welche bei der Beobachtung der Explosionswelle¹⁾ die einzig mögliche ist, wurde auch auf die langsame Verbrennung von Schlösing und Mondésir²⁾, von Berthelot und Vieille³⁾ und besonders von Mallard und Le Chatelier⁴⁾ angewandt.

Ungeachtet der grossen Sorgfalt, welche namentlich die letzten Forscher auf ihre Ausarbeitung verwendet haben, ergab diese Methode keine sicheren und genügend übereinstimmenden Resultate. Es ist auch leicht zu ersehen, dass dieselbe mit principiellen und unvermeidlichen Fehlern behaftet und daher keiner wesentlichen Vervollkommenung fähig ist.

Der grösste Fehler rührt von den Bewegungen der

1) Vgl. Berthelot, Sur la force des matières explosives d'après la Thermochimie. Paris 1883. I. p. 133; auch Berthelot u. Vieille, Ann. de chim. et de phys. (5) 28. p. 289. 1883.

2) Die Untersuchung dieser Herren ist meines Wissens leider niemals veröffentlicht worden und wird bloß mehrfach als durch mündliche Mittheilungen bekannt citirt, z. B. bei H. Sainte-Claire Deville, Leçons sur la dissociation. Paris 1864—1866. p. 298, bei Mallard u. Le Chatelier u. a.

3) Berthelot u. Vieille, l. c. p. 322.

4) Mallard u. Le Chatelier, l. c. p. 306.

unentzündeten Gasmasse, welche sehr bald nach der Entzündung entstehen und in keiner Weise weder vermieden, noch in Rechnung gebracht werden können. Wie Mallard und Le Chatelier gezeigt haben, können diese Bewegungen nicht nur fortschreitend sein, sondern auch in sehr raschen und heftigen Oscillationen bestehen.

Zweitens kann während der Beobachtungsperiode aus der ruhig brennenden oder oscillirenden Flamme eine Explosionswelle entstehen, was die Messung ganz ausserordentlich falschen kann.

Drittens werden wegen der Gefahr derartiger Experimente oft ziemlich enge Röhren dazu verwendet, und ist daher der Einfluss der Abkühlung durch die Wände ein sehr bedeutender, namentlich da die Flamme nicht bloß eine Stelle der Röhre erwärmt, sondern ihre ganze Länge durchwandern muss.

Viertens ist die fortschreitende Verbrennungsfläche keine Ebene, sondern eine meistens sehr verschieden gekrümmte Fläche, und es wird daher nicht die oben definirte normale Entzündungsgeschwindigkeit, sondern eine andere nicht vollständig bestimmte und von der Form der Fläche abhängige Grösse gemessen. Von den beiden letztgenannten Umständen kommt es, dass Röhren von verschiedenen Durchmessern verschiedene Resultate geliefert haben.

Endlich ist die Expansion der Gase beim Verbrennen nicht vollkommen frei, und daher der Druck in der Nähe der Verbrennungsfläche ein anderer als der ursprüngliche. Die nach dieser Methode gemessenen Geschwindigkeiten beziehen sich also auf höhere und unbekannte Drucke.

Zu allen diesen Umständen gesellen sich noch die Schwierigkeiten der Messung kurzer Zeitintervalle, Verspätung der Anzeige des Durchganges der Flamme u. s. w. Wegen der Bewegung der Gase, des höheren Druckes und der Entstehung der Explosionswelle sind die erhaltenen Zahlen meist viel zu gross.

Die zweite Methode ist in ihrer einfachsten und bis jetzt auch allein gebrauchten Form zuerst von Bunsen¹⁾

1) Bunsen, Pogg. Ann. 131. p. 161. 1866.

angewandt worden. Er füllte ein Eudiometer mit Knallgas, liess dasselbe aus einer kleinen Oeffnung in der dünnen Wand des Gefässes ausströmen und zündete den Strahl an. Dann verminderte er die Ausströmungsgeschwindigkeit, bis die Flamme ins Gefäss zurückschlug, und nahm an, in diesem Augenblicke sei die Ausströmungsgeschwindigkeit der Entzündungsgeschwindigkeit gleich. Später wurde genau dieselbe Methode von Mallard¹⁾ und dann von Mallard und Le Chatelier²⁾ auf verschiedene Gasgemische angewandt.

Die eben angeführte Grundannahme scheint mir aber nicht ganz richtig und jedenfalls nicht streng zu sein. Es können nämlich bei der Ausströmung des Gases aus einer engen Oeffnung in einer dünnen Wand die Ausströmungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Theilen der Oeffnung sehr verschieden sein. Die Flamme schlägt ins Gefäss zurück, sobald die kleinste von diesen verschiedenen Geschwindigkeiten den Werth der Entzündungsgeschwindigkeit überschreitet, während man durch Messung des ausgeströmten Volumens blos den Mittelwerth der Ausströmungsgeschwindigkeiten erhält. Letzterer dürfte also in der Regel bedeutend grösser als die gesuchte Entzündungsgeschwindigkeit sein.

Ausserdem aber bietet die Bunsen'sche Methode noch andere, nicht unwesentliche Schwierigkeiten. Da die Ausströmungsgeschwindigkeit eine veränderliche ist, so kann sie nicht mit befriedigender Genauigkeit gemessen werden. Die unregelmässigen Wirbelbewegungen bei dem Ausströmen aus einer Wandöffnung und die schnelle Zunahme des Druckes von aussen nach innen bedingen eine gewisse Unstetigkeit in der Bewegung der Flamme, namentlich beschleunigen sie dieselbe meistens. Auch wenn es möglich wäre, den Gasstrom vollkommen constant zu erhalten, wäre doch der Gleichgewichtszustand der Flamme in der Nähe der Oeffnung blos ein labiler. In der Ebene der Oeffnung selbst ist ein Gleichgewichtszustand der Flamme überhaupt unmöglich, da dieselbe hier stets schon mit einer Beschleunigung ankommt, und von hier ab nach innen die Ausströmungsgeschwindigkeit

1) Mallard, Ann. des Mines (7) 7. p. 355. 1875.

2) Mallard u. Le Chatelier, l. c. p. 302.

keit abnimmt, aber der Druck und somit die Entzündungsgeschwindigkeit zunehmen.

Diese Bemerkungen sind nicht durch theoretische Betrachtungen, sondern durch aufmerksame Beobachtung der Flamme bei Wiederholung der Bunsen'schen Versuche veranlasst.

Im Folgenden ist eine Beobachtungsmethode beschrieben, welche die oben aufgezählten Schwierigkeiten wenigstens zum Theil beseitigt und wirklich gestattet, die für das Gasgemisch charakteristische normale Entzündungsgeschwindigkeit zu messen.

Offenbar befindet sich jede ruhig brennende Bunsen'sche Flamme in einem dynamischen, sich beständig erneuernden Gleichgewicht. Der innere Flammenkegel, welcher nichts anderes als die oben definirte Verbrennungsfläche ist, übersteigt an Glanz und Leuchtkraft¹⁾ die übrigen Theile der Flamme, wenigstens in allen Fällen, wo das ausströmende Gas wirklich ein explosives Gemisch ist. Wie die Herren Mallard und Le Chatelier²⁾ treffend bemerken, ist nämlich die Temperatur dieser Fläche, wenn man von den Aenderungen der specifischen Wärmen absieht, gleich der Summe der Entzündungstemperatur und der Verbrennungstemperatur des Gases und daher um mehrere Hundert Grad höher als die Temperatur der anderen Flammentheile. Vermöge dieser Eigenschaft der Verbrennungsfläche kann dieselbe verhältnissmässig leicht photographirt und ausgemessen werden.

Wenn aber diese Fläche vollkommen unbeweglich erscheint, so kann das nur dadurch bedingt sein, dass in jedem Punkte dieser Fläche die zu ihr normale Componente der Ausströmungsgeschwindigkeit gleich und entgegengesetzt ist der oben definirten normalen Entzündungsgeschwindigkeit. Denn, wäre an irgend einer Stelle die erste Geschwindigkeit grösser, so würde sich an dieser Stelle die Verbrennungsfläche im Sinne der Strömung verschieben: die Flammenoberfläche würde sich dehnen. Wäre umgekehrt die senkrechte Componente der Strömungsgeschwindigkeit kleiner, so würde sich die Entzündung gegen die Strömung hin ver-

1) Vgl. Gouy, *Ann. de chim. et de phys.* (5) 18, p. 1. 1879.

2) Mallard u. Le Chatelier, *l. c.* p. 344.

breiten: der innere Flammenkegel würde sich zusammenziehen.

Um auf Grund dieser Betrachtungen die normale Entzündungsgeschwindigkeit zu berechnen, ist es am einfachsten, den von Hrn. Gouy¹⁾ empfohlenen Weg einzuschlagen.

Ist ds (Fig. 1) ein Element der Verbrennungsfläche, v die Strömungsgeschwindigkeit des unentzündeten Gases, α der Winkel, welchen dieselbe mit der Normale n zu ds bildet, so ist das in der Zeiteinheit in das Element ds hineinströmende Gasvolumen:

$$dV = v \cdot ds \cdot \cos \alpha = v_n ds,$$

wo v_n die normale Componente der Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet. Da nun $v_n = u$, so strömt in der Zeiteinheit durch die ganze Flamme das Gasvolumen:

$$(1) \quad V = \int u ds = u \cdot S,$$

wo S den Inhalt der ganzen Verbrennungsfläche bezeichnet. Die Annahme, dass die Entzündungsgeschwindigkeit u auf der ganzen Fläche constant ist, setzt voraus, dass von der abkühlenden Wirkung der Brennerwände abgesehen werden kann, und dass u von der Krümmung der Fläche unabhängig ist.

Es ist also $u = V/S$. Das Volumen V kann unmittelbar gemessen, der Flächeninhalt S unter Zuhülfenahme der Photographie leicht ausgerechnet werden.

Die im Folgenden mitgetheilten Messungen dieser Grössen besitzen bei weitem nicht die heutzutage überhaupt erreichbare Genauigkeit und sind vielmehr nur dazu bestimmt, die Vorzüge der Methode gegenüber einigen Behauptungen²⁾ zu beweisen und eine annähernde Vorstellung von den hier in Betracht kommenden Zahlen zu geben.

Beschreibung der Apparate und der Beobachtungsmethode.

Fig. 2 stellt schematisch im Grundriss die Anordnung der Apparate dar. Zwei Glockengasometer H und O mit regulirbarem Druck enthielten die beiden Gase, durch deren Mischung das explosive Gemisch hergestellt werden sollte.

1) Gouy, l. c. p. 30.

2) Z. B. Mallard u. Le Chatelier, l. c. p. 300 u. 372.

Die Glocken der Gasometer sind möglichst cylindrisch gearbeitet und wurden sorgfältig ausgemessen und calibriert. Beide sind am unteren Rande mit einem schweren Bleiring versehen. Die durch das Einsinken der Metallwände hervorbrachte allmähliche Abnahme des Druckes der Glocken war wenigstens theilweise durch das Gewicht der Ketten, an denen die Gegengewichte hingen, compensirt, sodass die grössten Druckschwankungen in einem der Gasometer 2 bis 3 mm Wasser, im anderen 4 bis 5 mm Wasser betrugen. Der Druck wurde mittelst Kathetometers an den Wassermanometern A und A_1 abgelesen, welche mit dem Inneren der Gasometer verbunden waren. Jede der beiden Glocken trug eine feste Marke, deren Höhe ebenfalls mit dem Kathetometer abgelesen werden konnte.

Als Sperrflüssigkeit diente eine verdünnte Boraxlösung.

Die Leitungen von beiden Gasometern führten zu einem Doppelhahn B mit zwei getrennten parallelen Bohrungen, sodass beide Gasometer immer vollkommen gleichzeitig geöffnet und geschlossen werden konnten. Von da ab führten beide noch getrennte Leitungen zu einem gewöhnlichen Gasvertheilungshahn C , in welchem sich die beiden Gase mischten, und mittelst dessen das Mischungsverhältniss willkürlich regulirt werden konnte. Weiter wurde das nunmehr explosive Gemisch durch einen 2 m langen Gummischlauch zu dem Brenner D geführt.

Als Brenner benutzte ich anfangs möglichst rund ausgesuchte gezogene Messingröhren mit nach aussen schräg abgedrehtem oberem Rande. Diese Röhren waren, je nach dem Durchmesser, 15 bis 30 cm lang. Bald aber überzeugte ich mich, dass man eine viel ruhigere Flamme erhält, wenn die Röhren bedeutend länger genommen werden, denn dann ist der Parallelismus der Strömungslinien vollkommener, und die in den Hähnen und Biegungen der Leitung entstandenen Wirbelbewegungen haben Zeit, sich aufzulösen.

Daher wurden Brenner von verschiedenen Dimensionen aus möglichst regelmässigen Glasröhren angefertigt. Das obere Ende dieser Röhren wurde abgeschliffen und daran ein aus Messing gedrehter Ansatz von 3 bis 4 cm Länge gekittet. Dessen Form ist in Fig. 3 dargestellt. Der innere Durch-

messer dieses Ansatzes entspricht genau demjenigen der Glasröhre, und der obere Rand ist von aussen kegelförmig zu einer scharfen Kante abgedreht. Dadurch wird die Wirbelbildung beim Ausströmen auf die unbedingt nothwendige Wirbelfläche reducirt, und der untere Rand der Flamme hat eine regelmässige, möglichst scharfe Stützlinie. Die inneren Durchmesser dieser Brenner wurden mittelst eines Kathetometers mit Mikroskop in verschiedenen Richtungen ausgemessen, und dieselben erwiesen sich als genügend rund. Für die drei Brenner, mit welchen die meisten Messungen ausgeführt sind, ergaben sich folgende Mittelwerthe:

Brenner Nr.	Länge	Mittl. Durchmesser
5	72 cm	6,78 mm
7	150	10,86
9	43	3,93

Letzterer verhältnissmässig enge Brenner wurde nur für Wasserstoffgemische in der Gegend der maximalen Entzündungsgeschwindigkeit gebraucht, da mit den anderen und den mir zu Gebote stehenden Leitungen keine genug grosse Ausströmungsgeschwindigkeit erzielt werden konnte. Bei den Beobachtungen wurde die Flamme in einen geräumigen dunklen Verbrennungsschrank *E* (Fig. 2) gebracht, welcher mit gedecktem Schornstein und zwei gegenüberstehenden seitlichen Thüren versehen war. Durch ein in der Höhe der Flamme angebrachte Wandöffnung stand derselbe mit einem photographischen Apparat *F* in Verbindung. Beide wurden möglichst fest aufgestellt, damit das Grössenverhältniss zwischen der Flamme und ihrem photographischen Bilde ein constantes sei. Dennoch waren leider kleine Veränderungen unvermeidlich, und daher wurde dieses Verhältniss mehrfach durch Photographiren eines Maassstabes von bekannter Grösse, der in den Brenner an die Stelle der Flamme eingesetzt wurde, direct ermittelt. Nur bei der Leuchtgasflamme wurden die oben angeführten Durchmesser der Brenner der Berechnung des Vergrösserungsverhältnisses zu Grunde gelegt.

Im Anfange der Untersuchung hatte ich versucht, den Inhalt der Verbrennungsfläche durch unmittelbare Abmessungen an der Flamme zu bestimmen und dazu ein Katheto-

meter und ein Fernrohr mit Theilkreis am Ocular angewandt. Später jedoch ging ich ausschliesslich zur photographischen Methode über, welche sich als viel zweckmässiger erwies.

Die Beobachtungen wurden nach folgendem Schema ausgeführt:

1. Die Gasometer wurden mit den zu untersuchenden Gasen gefüllt, und die Glocken mit so viel Gewicht belastet, dass die erwünschte Ausströmungsgeschwindigkeit sicher erreicht werden konnte. Dieselbe musste die normale Entzündungsgeschwindigkeit des Gemisches weit überschreiten, damit eine vollkommen ruhige Flamme entstehe.

2. Nachdem sich Temperatur- und Diffusionsgleichgewicht zwischen den Gasen und dem Sperrwasser hergestellt hatten (was an längerer Unbeweglichkeit der Glocken zu erkennen war), wurden die Hähne *B*, *C* und *C*₁ geöffnet, der Gasstrom angezündet und vermittelst der Vertheilungshähne *C* und *C*₁ das Mischungsverhältniss und die Ausströmungsgeschwindigkeit so regulirt, dass die Flamme gerade die erwünschte Grösse, Form und Farbe erhalte.

3. Dann wurde blos der Doppelhahn *B* geschlossen, (während *C* und *C*₁ unberührt blieben), und an jedem Gasometer die Lage der Glocken und der Druck mit dem Kathetometer abgelesen.

4. Sodann wurde nach dem Secundenschlag eines Chronometers der Doppelhahn wieder geöffnet, die Gase entzündet, eine oder drei aufeinander folgende Aufnahmen gemacht, und nach Verlauf einer bekannten Zeit der Doppelhahn wieder geschlossen.

5. Endlich wurde die neue Lage der Glocken und der Druck in den Gasometern abermals abgelesen.

Aus den so gewonnenen Zahlen, der Temperatur des Beobachtungsraumes und dem Barometerstand wurden die während der Zeiteinheit ausgeflossenen Volumina beider Gase berechnet und danach das Mischungsverhältniss und das Gesamtvolumen bestimmt.

Wenn nämlich die mit dem Kathetometer gemessene Senkung der Gasometerglocke = *l* war, der innere Querschnitt derselben $\pi R^2 = Q$, die Dicke der Metallwände der Glocke = *d*, der innere Querschnitt des unteren, mit Sperr-

wasser gefüllten Gefäßes = P und q die freie Wasserfläche unter der Glocke, so war die Verminderung des inneren Gasvolumens:

$$(2) \quad V = l \cdot \left(Q + \frac{2\pi R d q}{P - 2\pi R d} \right) = l \cdot Q',$$

wo Q' als der auf die Erhöhung des Wasserniveaus corrigierte innere Querschnitt des Glockencylinders bezeichnet werden kann. Da die Druckschwankungen während einer Beobachtung im Vergleich zum Gesamtdruck sehr klein waren, wurden dieselben vernachlässigt, und V wurde als das ursprüngliche Volumen des entwichenen Gases angesehen.

Auf dem Wege bis zur Mündung des Brenners dehnte sich diese Gasmasse bis auf den Atmosphärendruck aus, da aber diese Ausdehnung nur allmählich geschah, und die Leitungen ziemlich lang waren, so kann sie nicht als adiabatisch angesehen werden. Wahrscheinlich war der wirkliche Process ein mittlerer zwischen einem adiabatischen und einem isothermischen. Da aber trotz aller Vorsichtsmaassregeln eine gelinde Erwärmung der Brennerspitze nicht zu vermeiden war, so ist kaum anzunehmen, dass die Gase vor der Entzündung eine niedrigere Temperatur als in den Gasometern hatten. Ausserdem ist zu bemerken, dass der Ueberdruck in den Gasometern bloss zwischen den Grenzen von 5 bis 20 cm Wasser variierte und somit selbst der Gesamtunterschied zwischen den durch thermische und adiabatische Ausdehnung gelieferten Volumen immer weniger als 1,5 Proc. des ganzen Gasvolumens betrug und meistens kleiner als andere mögliche Beobachtungsfehler war. Daher wurde die Ausdehnung immer als eine isothermische berechnet.

Wenn b die auf 0° reducirte Barometerhöhe, p_1 und p_2 die in Quecksilber von 0° umgerechneten vollen Drucke in den beiden Gasometern bedeuten, und v_1 und v_2 die nach (2) berechneten Anfangsvolumina sind, so strömt während der ganzen Versuchsdauer in die Flamme das Volumen:

$$v = \frac{v_1 p_1 + v_2 p_2}{b}$$

ein. Ist der Inhalt der inneren Flammenfläche = s , die Zeit zwischen Oeffnung und Schliessung des Doppelhahns = t ,

so berechnet sich die gesuchte normale Entzündungsgeschwindigkeit u einfach nach:

$$(3) \quad u = \frac{v}{st} = \frac{v_1 p_1 + v_2 p_2}{b. s. t}.$$

Die Bestimmung der Fläche s wurde in folgender Weise ausgeführt: nachdem eine grössere Anzahl negativer Flammenbilder angefertigt war, wurden dieselben in bekanntem Verhältniss (ungefähr aufs Zehnfache linear) vergrössert auf Millimeterpapier projicirt und der Umriss der inneren Flammenflächen sorgfältig nachgezeichnet. Nach diesen vergrösserten Projectionen wurden die Verbrennungsflächen als Rotationsflächen mittelst der Simpson'schen Regel berechnet. In der genauen Bestimmung dieser Fläche liegt die Hauptschwierigkeit unserer Untersuchungsmethode, und die grössten Abweichungen vom Mittel in meinen Resultaten rühren wahrscheinlich von Fehlern her, welche gerade hierin begangen sind. Jedoch gelang es mir, genügend scharfe Bilder zu erhalten, um bei verschiedenen Schätzungen derselben Fläche die Abweichung unter 1 bis 2 Proc. zu reduciren.

Das Mischungsverhältniss wurde durch den Procentgehalt an brennbarem Gas im Volumen des Gemisches ausgedrückt, also:

$$(4) \quad n = \frac{100 p_1 v_1}{p_1 v_1 + p_2 v_2}.$$

Jedes photographische Flammenbild mit den dazu gehörenden Messungen lieferte uns zwei einander entsprechende Werthe von u und n ; ersteres wurde als Function des letzteren angesehen.

Resultate.

Es sind sechs verschiedene Gemische untersucht worden und dabei über hundert und zwanzig photographische Flammenbilder aufgenommen. Mehr oder weniger vollständige Beobachtungsreihen liegen für folgende drei Gemische vor: Leuchtgas mit Luft, Wasserstoff mit Luft und Kohlenoxyd mit Sauerstoff. Einzelne Beobachtungen sind für Kohlenoxyd mit Luft, Methan mit Luft und Wasserstoff mit Sauerstoff ausgeführt, sie genügen aber nicht, um auch für diese letzteren Gemische die vollständige Verbrennungscurve festzustellen.

Leuchtgas mit Luft. — Der Gasometer wurde immer direct aus der Leitung gefüllt. Das Gas hatte folgende mittlere Zusammensetzung¹⁾:

Wasserstoff	51,08
Methan	29,26
Kohlenoxyd	10,20
Schwere Kohlenwasserstoffe . .	4,26
Kohlensäure	2,92
Sauerstoff	0,26
Stickstoff	2,02

Im Gehalt an Wasserstoff und den übrigen Hauptbestandtheilen kamen Schwankungen von mehreren Procenten vor, im ganzen aber erwies sich die Zusammensetzung als ziemlich constant.

Bei diesen sowohl, als bei allen weiter unten beschriebenen Veruchen waren beide Gase mit Wasserdampf nahezu gesättigt.

Die Resultate zweier verschiedenen, durch einen Zeitraum von mehreren Monaten getrennten Beobachtungsreihen sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Die erste Spalte enthält die Beobachtungsnummer; wenn mehrere Aufnahmen nebeneinander auf derselben Platte gemacht sind, wurden sie durch die Buchstaben a, b, c unterschieden. Die zweite Spalte zeigt den zur Beobachtung verwendeten Brenner, die dritte den nach Gl. (4) berechneten Procentgehalt des Gemisches an Leuchtgas und die vierte die nach Gl. (3) ermittelte normale Entzündungsgeschwindigkeit des Gemisches.

Tabelle I. Leuchtgas mit Luft.

Beobachtung	Brenner Nr.	Mischungs- verhältn. $n\%$	Normale Entzündungs- geschw. $u = \frac{V}{St} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	Beobachtung	Brenner Nr.	Mischungs- verhältn. $n\%$	Normale Entzündungs- geschw. $u = \frac{V}{St} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
54b	7	11,62	36,62	10c	5	13,64	56,50
53a	7	12,37	36,67	14c	7	13,77	53,66
53b	7	12,50	39,18	10b	5	13,81	59,40
51a	7	12,60	47,21	11c	7	14,12	62,92

1) Die Zahlen, aus denen diese Mittelwerthe berechnet worden sind, verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Hrn. Dr. Robert v. Helmholtz der sie seinerseits aus der Verwaltung der städtischen Gasanstalten in Berlin erhalten hat.

Beobach- tung	Brenner Nr.	Mischungs- verhältn. $n \%$	Normale Entzündungs- geschw. $u = \frac{V}{St} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	Beobach- tung	Brenner Nr.	Mischungs- verhältn. $n \%$	Normale Entzündungs- geschw. $u = \frac{V}{St} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
7a	5	14,71	62,50	6c	5	21,10	50,18
52c	7	16,78	65,38	11a	7	21,41	50,53
54a	7	17,26	66,16	50ab	7	21,54	47,86
54c	7	17,27	69,83	13b	7	22,11	38,12
53e	7	17,52	67,76	14a	7	22,22	32,28
14b	7	17,79	69,43	7c	5	23,53	32,57
11b	7	17,95	74,54	6b	5	23,70	28,29
10a	5	18,35	69,50	13a	7	24,03	20,63
7b	5	18,67	66,91	8a	5	24,29	20,89
9c	5	19,68	64,15	1	4	24,65	21,10
13c	7	19,82	64,20	12b	7	24,83	16,22
52a	7	19,97	61,27	12a	7	26,59	8,58
5	5	20,04	61,66	9a	5	26,89	14,49
2b	4	20,28	67,12(?)	6a	5	29,24	10,61
9b	5	20,84	60,36				

Aus diesen Zahlen ist zu ersehen, dass mit verschiedenen Brennern gemachte Beobachtungen sich gut aneinander reihen lassen, dass also die gebrauchten Brenner weit genug waren, um den abkühlenden Einfluss des scharfen Brenner- randes vernachlässigen zu können. In den Grenzen der zufälligen Beobachtungsfehler hat sich dieselbe Thatsache auch für die anderen untersuchten Gemische herausgestellt.

Wenn man die Temperatur- und Barometerschwankungen, die zahlreichen Beobachtungsfehler und die etwas veränderliche Zusammensetzung des Leuchtgases in Betracht zieht, so scheinen diese Resultate die Gesetzmässigkeit in der Veränderung von u mit n entschieden festzustellen. Die normale Entzündungsgeschwindigkeit erscheint als eindeutige Function des Mischungsverhältnisses. Die Vermuthung von Gouy¹⁾, dass bei constanter Zusammensetzung der Inhalt des inneren Flammenkegels der Ausströmungsgeschwindigkeit proportional sei, findet somit ihre volle Bestätigung. Das Verhältniss dieser beiden Grössen ist eben die für das Gemisch charakteristische normale Entzündungsgeschwindigkeit.

In Fig. 4A sind die Werthe von n als Abscissen, diejenigen von u als Ordinaten aufgetragen und danach eine continuirliche Curve gezogen, welche die wahrscheinlichsten

1) Gouy, l. c. p. 31.

Werthe der Entzündungsgeschwindigkeit zusammenfasst. Diese wahrscheinlichsten Werthe sind für ganze Procente in folgender Tabelle gegeben.

Tabelle II. Leuchtgas mit Luft.

$n \%$	$u \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$n \%$	$u \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
11	28	19	68
12	38	20	62
13	48	21	53
14	57	22	43
15	64	23	33
16	68	24	24
17	70	25	16
18	71	26	11

Die Curve besteht nicht aus zwei sich schneidenden Geraden wie die Herren Mallard und Le Chatelier¹⁾ es annehmen, sondern hat eine ganz ausgesprochene Krümmung. Die Geschwindigkeit steigt zwischen 11 und 15 Proc. Leuchtgasgehalt rasch an, verändert sich nur wenig zwischen 16 und 19 Proc., erreicht ihr Maximum bei 18 Proc. und fällt dann wieder ziemlich rasch ab. Ein in äquivalenten Verhältnissen hergestelltes Gemisch würde etwa 17,2 Proc. Leuchtgas enthalten. Das Maximum ist also nur sehr wenig, aber in demselben Sinne, wie Mallard und Le Chatelier es angeben, verschoben. Die Werthe der Geschwindigkeiten sind alle etwa im Verhältniss 5:3 kleiner als die von den genannten Beobachtern gefundenen. Nach dem oben bei der Besprechung der von ihnen angewandten Methoden Gesagten, war eine derartige Abweichung zu erwarten. Dagegen stimmen die von mir erhaltenen Werthe sehr gut mit denjenigen, welche Hr. A. Witz aus seinen Beobachtungen an Gasmotoren abgeleitet hat.²⁾ Das wäre wohl dadurch zu erklären, dass bei seinen Versuchen die Kolbengeschwindigkeit so gewählt wurde, dass die Ausdehnung der brennenden Gase unter constantem Druck vor sich ging, und daher die Bedingungen denjenigen analog waren, in welchen sich eine frei brennende Bunsen'sche Flamme befindet.

1) Mallard u. Le Chatelier, l. c. p. 323 u. 325.

2) A. Witz, Journ. de phys. (3) 4. p. 311. 1885.

Bevor ich die Resultate der Untersuchung anderer explosiver Gemische mittheile, möchte ich einige Bemerkungen über das allgemeine Verhalten der Bunsen'schen Flamme einschalten, da ich die dabei auftretenden Erscheinungen nirgends genau besprochen finde. Diese Bemerkungen beziehen sich sowohl auf die mit Leuchtgas, wie auch auf alle mit anderen Gasen gespeiste Flammen.

Die in den Laboratorien gewöhnlich gebrauchte nicht-leuchtende Flamme des Bunsen'schen Brenners enthält einen grossen Ueberschuss (etwa 30 Proc.) Leuchtgas, welches zum Theil nur auf Kosten der äusseren Luft verbrennt. Dabei ist der innere Flammenkegel kaum zu erkennen und seine Fläche sehr schwer zu bestimmen. Je mehr man aber die hinzuströmende Luftmenge vergrössert, desto schärfer tritt die Verbrennungsfläche hervor und namentlich schon viel früher, als man die maximale Entzündungsgeschwindigkeit erreicht. Trotz der Vergrösserung der gesamten Ausströmungsgeschwindigkeit zieht sich die Verbrennungsfläche zusammen, der innere Kegel wird immer niedriger und leuchtender, bis seine Höhe ein Minimum erreicht hat. Etwas nach diesem Augenblick verändert die Flamme plötzlich ihre Farbe, welche aus dem Grünlichen ins Violette umschlägt, und verliert zugleich ihre reducirenden Eigenschaften, indem sie wegen des Ueberschusses an Sauerstoff oxydirend wird.

Wenn man den Zufluss von Luft weiter vergrössert, so dehnt sich der innere Kegel wegen Verminderung der Entzündungsgeschwindigkeit wieder aus, seine Höhe nimmt erst langsam, dann schnell zu, indem gleichzeitig das ganze Volumen der sichtbaren Flamme sich vermindert und schliesslich fast auf die Verbrennungsfläche allein reducirt.

Diese verschiedenen Phasen der Bunsen'schen Flamme können an den beigelegten photographischen Bildern, Fig. 5 *a* bis *i*, verfolgt werden. Dieselben entsprechen verschiedenen Luftmengen, aber annähernd gleichem Gasverbrauch.

Da die absolute Höhe des inneren Flammenkegels nicht nur von der Entzündungsgeschwindigkeit u , sondern auch von der Ausströmungsgeschwindigkeit der Gase abhängt, so fällt im allgemeinen das Minimum der Flammenhöhe mit dem Maximum von u nicht zusammen. Nur in dem Falle, wenn

wir die Aenderung des Mischungsverhältnisses n so bewerkstelligen, dass die Ausströmungsgeschwindigkeit w der Gase aus dem Brenner constant bleibt, entspricht der grösste Werth von u der kleinsten Flammhöhe.

Sonst, wenn $w = F(n)$ die Gleichung ist, welche die Art und Weise bestimmt, wie wir die Aenderung des Mischungsverhältnisses vornehmen, und $u = f(n)$ die in Fig. 4 gegebene Curve darstellt, können wir das Minimum der Flammhöhe durch Rechnung finden. Es sei q der Querschnitt des Brenners; dann haben wir nach Gl. (1) $s = q \cdot w / u$. Der Inhalt der Verbrennungsfläche erreicht ein Minimum, wenn $(dw/dn)/(du/dn) = w/u$. Diese Bedingung drückt aus, dass die dem gesuchten n entsprechenden Tangenten zu den beiden Curven $u = f(n)$ und $w = F(n)$ sich in der n -Axe schneiden müssen.

Wenn wir z. B. das in der Zeiteinheit ausströmende Leuchtgasvolumen constant erhalten und bloß die Luftmenge verändern, so ist die Curve $w = F(n)$ eine gleichseitige Hyperbel $n \cdot w = \text{const.}$; lassen wir umgekehrt die Luftmenge constant, so ist es die Hyperbel $(n-1) \cdot w = \text{const.}$ In beiden Fällen wird also das Minimum des inneren Flammenkegels verschiedenen Werthen von n entsprechen und an verschiedenen Seiten der maximalen Entzündungsgeschwindigkeit liegen. Diese Betrachtungen würden sich leicht an unseren Photographien prüfen lassen, da jedoch die Form der Function $F(n)$ vollkommen willkürlich ist, so erscheint die weitere Verfolgung der Frage überflüssig.

Wasserstoff mit Luft. — Mit diesem Gemische wurden 27 Aufnahmen gemacht und die Resultate nach derselben Methode wie für Leuchtgas berechnet. Der Wasserstoff wurde aus Zink und reiner Schwefelsäure dargestellt und nur in Wasser gewaschen. Die Flamme war stets etwas gefärbt, und in der Nähe des Maximums der Entzündungsgeschwindigkeit war der innere Kegel sogar stark leuchtend. Dennoch musste auch bei Gebrauch der empfindlichsten Platten die Expositionszeit über eine Minute und zuweilen bis zu zwei Minuten ausgedehnt werden. Um dieselbe vermindern zu können, wurden bei einigen Versuchen dem Wasserstoff Spuren von Schwefelkohlenstoffdampf beigemischt,

was, wie sich erwies, keinen merklichen Einfluss auf die Entzündungsgeschwindigkeit hat. Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt und in Fig. 4, B graphisch dargestellt.

Tabelle III. Wasserstoff mit Luft.

Versuch Nr.	Brenner Nr.	Mischungs- verhältn. $n \frac{\text{O}}{\text{H}_2}$	Norm. Ent- zündungs- geschw. $u \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	Versuch Nr.	Brenner Nr.	Mischungs- verhältn. $n \frac{\text{O}}{\text{H}_2}$	Norm. Ent- zündungs- geschw. $u \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
23a	5	15,34	41,5	56e	9	41,26	277,1
23b	5	17,34	47,9	28b	9	43,42	274,6
27a	9	22,41	109,2	25b	9	44,01	263,8
27b	9	24,08	141,4	25a	9	52,03	244,7
26c	9	24,27	99,0	17a	5	53,86	226,9
56a, b	9	24,70	110,5	22e	5	57,68	208,0
28a	9	25,49	145,5	18b	5	58,51	180,1
23c	5	26,85	194,7	17b	5	58,80	200,2
26b	9	27,05	183,8	24b	9	65,64	90,0
25c	9	28,19	203,7	16a	5	65,68	100,1
27c	9	31,70	260,5	18a	5	67,68	84,4
26a	9	34,29	253,2	22b	5	68,46	78,2
24c	9	36,89	280,8	22a	5	74,60	64,3

Wir sehen, dass die Form der Curve derjenigen des Leuchtgases sehr ähnlich ist, nur die Dimensionen sind ganz andere. Das Maximum der normalen Entzündungsgeschwindigkeit entspricht wieder nicht demjenigen Gemisch, in welchem H_2 und O_2 in äquivalenten Mengen enthalten sind, sondern ist diesmal noch stärker verschoben, nämlich von $n = 29,5$ Proc. bis auf ungefähr $n = 40$ Proc. In Bezug auf die Lage des Maximums stimmen meine Resultate vollkommen mit denjenigen von Mallard und Le Chatelier. Die absoluten Werthe der Geschwindigkeiten sind aber wieder viel kleiner als die ihrigen. Die Curve besteht ebenfalls nicht aus zwei Geraden, sondern ist sehr gekrümmt, hat zwei Wendepunkte und steigt rascher, als sie nachher fällt. Diese letztgenannte Eigenschaft scheint für alle mit Luft hergestellte explosive Gemische charakteristisch zu sein. Für Gemische mit Sauerstoff ist es anders, wie wir sogleich sehen werden.

Folgende Tabelle enthält die wahrscheinlichsten, nach der Curve interpolirten Werthe der normalen Entzündungsgeschwindigkeit für je 5 Proc. Wasserstoffgehalt.

Tabelle IV. Wasserstoff mit Luft.

$n \frac{\circ}{\circ}$	$u \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$n \frac{\circ}{\circ}$	$u \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
Wasserstoff		Wasserstoff	
15	40	45	270
20	65	50	250
25	140	55	222
30	235	60	172
35	270	65	105
40	277	70	74

Das allgemeine Verhalten der Flamme ist dem für Leuchtgas beschriebenen vollkommen analog, nur ist die Verbrennungsfläche viel zugespitzter und hat fast genau die Form eines Kegels. Die Photographien Fig. 6, *a* bis *h* stellen die verschiedenen Phasen dieser Flamme dar. Die in der Flamme *h* sichtbare helle Doppelschicht, welche den inneren Kegel umgibt, rührt von der Beimischung kleiner Mengen Schwefelkohlenstoff her.

Kohlenoxyd mit Sauerstoff. — Das CO wurde aus reiner Oxalsäure und reiner Schwefelsäure dargestellt, indem die zugleich entweichende Kohlensäure in einer Reihe von Waschflaschen mit concentrirter Kalilauge vollständig absorbiert wurde. Die letzte Flasche enthielt Kalkwasser, welches während der ganzen Entwicklung klar bleiben musste.

Die schöne intensiv blaue Flamme ist besonders zu photographischen Aufnahmen geeignet, da sie sehr ruhig brennt und nur eine ganz kurze Expositionszeit erfordert.

Tab. V enthält die unmittelbaren und Tab. VI die interpolirten Beobachtungsergebnisse. Dieselben sind auch in Fig. 4, C graphisch zusammengestellt.

Tabelle V. Kohlenoxyd mit Sauerstoff.

Versuch	Brenner	Mischungsverhältn.	Norm. Entzündungsgeschw.	Versuch	Brenner	Mischungsverhältn.	Norm. Entzündungsgeschw.
Nr.	Nr.	$n \frac{\circ}{\circ}$ CO	$u \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	Nr.	Nr.	$n \frac{\circ}{\circ}$ CO	$u \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
38	7	27,35	31,81	44b	5	52,06	78,03
37	7	28,11	31,98	44c	5	58,63	82,30
40a	7	29,70	36,97	42c	5	66,26	83,78
39	7	29,76	36,11	45a	5	70,52	87,59
40b	7	34,50	53,68	45b	5	75,38	89,82
41	5	38,03	55,08	45c	5	81,47	86,90
42a	5	44,33	62,73	43c	5	83,42	69,53
44a	5	48,62	69,46	43a,b	5	94,00	25,06
42b	5	50,59	79,32	40c	7	96,13	16,83

Tabelle VI. Kohlenoxyd mit Sauerstoff.

$n\%$ CO	u $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$n\%$ CO	u $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
25	30	65	88
30	40	70	91
35	49	75	91
40	58	80	85
45	66	85	70
50	73	90	45
55	80	95	20
60	84		

Wir sehen, dass die Curve im ganzen viel flacher ist, als bei den zwei vorher untersuchten Gemischen. Die normale Entzündungsgeschwindigkeit steigt nur sehr langsam mit dem Kohlenoxydgehalt, verändert sich nur wenig zwischen 60 und 80 Proc. und fällt sodann rasch ab. Während das in äquivalentem Verhältniss hergestellte Gemisch 66,6 Proc. CO enthält, befindet sich das Maximum der Entzündungsgeschwindigkeit erst zwischen 75 und 80 Proc., ist also in derselben Richtung verschoben, wie bei den zwei anderen explosiven Gemischen.

Kohlenoxyd mit Luft. — Mit diesem Gemisch wurden nur wenige Versuche angestellt, welche wegen ihrer zu kleinen Zahl nicht gestatten, die Verbrennungscurve mit Sicherheit festzustellen. Der Vollständigkeit halber theile ich auch diese Resultate mit:

Tabelle VII. Kohlenoxyd mit Luft.

Versuch Nr.	Brenner Nr.	$n\%$ CO	Normale Entzündungsgeschw. u $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
34a	5	38,67	35,0
36c	7	40,46	44,9
33a	5	42,69	36,9
33b	5	43,62	36,3
35(a, b, c)	5	54,91	38,4
36b	7	64,07	26,8
36a	7	87,37	8,8

Die dritte und vierte Beobachtung ist wahrscheinlich zu klein, die fünfte etwas zu gross ausgefallen. Das Maximum der Entzündungsgeschwindigkeit dürfte sich, ähnlich wie beim Wasserstoff-Luftgemisch, in der Nähe von 40 Proc. befinden und etwa 45 cm/sec betragen.

Es wurden noch einige Versuche gemacht, bei denen nicht alle aus der Oxalsäure entweichende Kohlensäure absorbiert wurde, sondern dem CO noch etwa 25 bis 30 Proc. CO₂ beigemischt waren. Bei diesen Versuchen ergaben sich etwas kleinere Werthe für u . Die normale Entzündungsgeschwindigkeit wird also durch Beimischung von Kohlensäure herabgedrückt, wie die Herren Mallard und Le Chatelier es bereits constatirt haben.¹⁾

Methan mit Luft. — Mit diesem Gemisch wurden neun Versuche gemacht. Dieselben ergaben Entzündungsgeschwindigkeiten, welche zwischen 5 und 50 cm/sec liegen, bieten aber leider keine genügende Uebereinstimmung untereinander und sind nicht zum Aufstellen einer continuirlichen Curve geeignet, was wahrscheinlich durch starke Verunreinigungen im Gas, welches nicht analysirt wurde, zu erklären ist.

Wasserstoff mit Sauerstoff. — Von allen untersuchten Gemischen hat dieses die grösste normale Entzündungsgeschwindigkeit. Es wurden damit blos sechs Versuche angestellt, um die Frage zu entscheiden, ob die von mir angewandte Methode auch hier möglich und brauchbar sei. Ich hielt es nicht für zweckmässig, zu noch schmäleren Brennern als Nr. 9 zu greifen, denn dadurch würde der abkühlende Einfluss des Brennerandes vergrössert, und die photographischen Flammenbilder würden zu klein ausfallen. Dem entsprechend hätte ich grössere Gasmassen, weitere Leitungen und Hähne anwenden müssen. Dieselben standen mir aber leider bis jetzt nicht zur Verfügung. Daher beschränkte ich mich auf folgende Versuche.

Tabelle VIII. Wasserstoff mit Sauerstoff.

Versuch Nr.	Brenner Nr.	n % H ₂	Normale Ent- zündungsgeschw. cm " sec
58b	9	19,43	121
57c	9	21,83	161
57b	9	83,81	582
58a	9	86,87	447
57a	9	88,53	360
59	9	91,90	151

1) Mallard u. Le Chatelier, l. c. p. 325.

Wie aus dieser Tabelle zu ersehen ist, habe ich nur an beiden Enden der Verbrennungscurve experimentirt und das Maximum der Entzündungsgeschwindigkeit bei weitem nicht erreicht. Dennoch zeigen diese Versuche entschieden, dass mit zweckmässig eingerichteten Apparaten auch für das Wasserstoff-Sauerstoffknallgas die Verbrennungscurve vollständig und genau festgestellt werden kann. Wenn Entzündungsgeschwindigkeiten von 5,8 m noch genau messbar sind, so sind es auch gewiss solche von 10 bis 12 m, und diesen Werth überschreitet auch die grösste normale Entzündungsgeschwindigkeit dieses Knallgases höchst wahrscheinlich nicht.

Wenn man aus den eben angeführten Beobachtungen und der bekannten Verbrennungscurve für das Kohlenoxyd-Sauerstoffgemisch einen Analogieschluss ziehen dürfte, so würde sich die Lage dieser maximalen Entzündungsgeschwindigkeit zwischen 70 und 75 Proc. Wasserstoffgehalt ergeben. Dem in äquivalentem Verhältniss (66,6 Proc.) hergestellten Gemisch würde eine normale Entzündungsgeschwindigkeit von etwa 9 m pro Secunde entsprechen.

Wahrscheinliche Beziehung zwischen der normalen Entzündungsgeschwindigkeit und den anderen Eigenschaften explosiver Gasgemische.

In der mehrfach citirten Arbeit haben die Herren Mallard und Le Chatelier¹⁾ versucht, aus einer Reihe sehr annehmbarer Betrachtungen die Vertheilung der Temperatur in der Nähe einer ebenen Verbrennungsfläche zu veranschaulichen und daraus eine analytische Beziehung zwischen der Entzündungsgeschwindigkeit und den übrigen den Zustand des Gases charakterisirenden Grössen abzuleiten. Die von ihnen aufgestellte Gleichung ist:

$$u = \frac{L(T - t)}{C(t - \Theta)} F(T, t).$$

Hierin bedeutet L die Wärmeleitungsfähigkeit des noch unentzündeten Gemisches, C seine spezifische Wärme bei constantem Druck, Θ die Anfangstemperatur des Gases, t die

1) Mallard u. Le Chatelier, l. c. p. 343.

Entzündungstemperatur und T die Verbrennungstemperatur. $F(T, t)$ ist eine noch unbekannte Function der beiden letztgenannten Temperaturen, die möglicherweise auch eine Constante sein könnte.

Wenn man für die drei in äquivalentem Verhältniss hergestellten Gemische: Wasserstoff-Luft, Wasserstoff-Sauerstoff und Kohlenoxyd-Sauerstoff die von Mallard und Le Chatelier angegebenen Werthe von T und t annimmt, C auf die Volumeneinheit bezieht und für L die nach den Winkelmann'schen Beobachtungen berechneten Zahlen einsetzt, so erhält man in der That eine annähernde Proportionalität zwischen dem Ausdruck $L(T - t)/C(t - \Theta)$ und den oben gefundenen Werthen der normalen Entzündungsgeschwindigkeit der drei genannten Gemische. Wegen der Unsicherheit der Werthe von T , C und L kann jedoch die Vermuthung von der Constanz der $F(T, t)$ noch nicht als erwiesen betrachtet werden. Sollte sie sich auch weiter bestätigen, so könnte obige Gleichung zur Berechnung der Flammentemperatur T als Function des Mischungsverhältnisses n benutzt werden, sobald die normale Entzündungsgeschwindigkeit und die übrigen Grössen der Gleichung bekannt wären.

Die in vorliegender Arbeit mitgetheilten Beobachtungen würden also zu folgenden Schlüssen führen:

1. Die hier angewandte und von Gouy schon früher empfohlene Methode zur Bestimmung der normalen Entzündungsgeschwindigkeiten explosiver Gasgemische ist die zweckmässigste von allen bis jetzt vorgeschlagenen.

2. Die normalen Entzündungsgeschwindigkeiten bei Atmosphärendruck und vollkommen freier Ausdehnung der Verbrennungsproducte sind bedeutend kleiner als die von Bunsen, Mallard und Le Chatelier gefundenen.

3. Die Maxima der Entzündungsgeschwindigkeiten entsprechen nicht genau den in äquivalenten Verhältnissen hergestellten Mischungen, sondern fordern stets einen mehr oder weniger grossen Ueberschuss an brennbarem Gas.

4. Die Verbrennungscurven, welche die normale Entzündungsgeschwindigkeit als Function des Mischungsverhältnisses darstellen, bestehen nicht, wie Mallard und Le Chatelier es angeben, aus zwei sich schneidenden Geraden,

sondern zeigen eine ausgesprochene und überall endliche Krümmung.

Schliesslich sei es mir gestattet, den Herren Geheimrath Prof. v. Helmholtz und Prof. Kundt meine tiefste Dankbarkeit für die mir bei dieser Arbeit durch Rath und That gewährte Unterstützung auszusprechen.

Berlin, Physik. Institut, im December 1888.

II. Ueber Absorption von Kohlensäure in Gemischen von Alkohol und Wasser; von Otto Müller.

(Hierzu Taf. II Fig. 7—11.)

(Auszug aus der Inauguraldissertation.)

Trotz des überaus grossen Reichthums an Versuchen zum Studium der Absorptionserscheinungen fehlen noch fast vollständig Untersuchungen über die Absorption von Flüssigkeitsgemischen. Die einzige über diesen Gegenstand existirende Arbeit stammt von Hrn. Setschenow¹⁾ und behandelt die Absorption der Gemische von Schwefelsäure mit Wasser für Kohlensäure. Ausserdem ist nur noch bekannt, dass bei Mischungen von Wasser und Alkohol eine Gasentwicklung stattfindet, und dass diese dem Umstande zuzuschreiben ist, dass Gemische von Wasser und Alkohol weniger Gas absorbiren, als Alkohol allein.²⁾ Ich habe daher auf Anregung des Hrn. G. Wiedemann unternommen, das Absorptionsvermögen des verdünnten Alkohols für Kohlensäure näher zu untersuchen.

Von den zahlreichen zum Studium der Absorptionserscheinungen verwendeten Methoden kamen hier nur zwei in Betracht, die Bunsen'sche³⁾ und die bereits von Mackenzie benutzte Wiedemann'sche⁴⁾, da die anderen Methoden,

1) Setschenow, Bull. de l'Acad. Imp. des Sc. de St. Pétersbourg. 22. p. 102. 1876.

2) Wer diese Erscheinung zuerst beobachtet hat, habe ich nicht ermitteln können, doch scheint sie schon lange bekannt zu sein.

3) Bunsen, Gasom. Methoden. p. 136. 1857.

4) J. J. Mackenzie, Wied. Ann. 1. p. 438. 1877.

unter denen besonders die von Wroblewski¹⁾ zu nennen sind, andere Zwecke haben und also für diese Untersuchung unbrauchbar sind.²⁾ Die Bunsen'sche Methode ist zu bekannt, als dass sie hier nochmals beschrieben zu werden brauchte. Sie war lange Zeit die einzige Methode, welche zur Untersuchung der Absorptionerscheinungen verwendet wurde, und kann in dieser Hinsicht als classisch bezeichnet werden. Trotzdem besitzt sie eine Anzahl nicht zu unterschätzender Mängel, welche schon von Mackenzie³⁾ und Wroblewski⁴⁾ hervorgehoben wurden, hier aber nochmals zusammengestellt werden mögen.

Der Hauptnachtheil der Methode ist der, dass das Quecksilber mit dem Wasser des Bades geschüttelt wird und also nass in die Absorptionsröhre kommt. Sodann kann man nur bei Drucken arbeiten, die kleiner sind als eine Atmosphäre, da sonst das die Absorptionsröhre umgebende Quecksilber höher stehen müsste, als das in dieselbe eingetretene, und man infolge dessen nicht im Stande sein würde, das Volumen des Gases nach der Absorption abzulesen. Endlich muss die Ablesung der Volumina durch ein Kathetometer bei dem grossen Querschnitt der Absorptionsröhre (nicht unter 2 ccm Durchmesser) ungenau werden. Auch setzt dieser grosse Querschnitt eine sehr sorgfältige Calibrirung voraus. Einen grossen Vortheil hat die Methode, nämlich sie vermeidet jeden Hahn und gibt einen vorzüglichen luftdichten Abschluss.

Bei der Wiedemann'schen Methode werden diese Fehler vermieden, indem man zunächst zwei constante Volumina für Flüssigkeit und Gas verwendet und diese Volumina, sowie das des absorbirten Gases durch Auswägen mit Quecksilber bestimmt. Ferner verwendet man zur Regulirung des Druckes ein Manometer, sodass man bei sehr verschiedenen Drucken arbeiten kann. Will man Drucke verwenden, die

1) Wroblewski, Wied. Ann. 8. p. 29. 1879; 17. p. 103. 1882; 18. p. 290. 1883.

2) Die neuerdings von den Herren St. Gniewosz und Al. Walfisz benutzte Methode ist eine Schnellmethode und kann als solche auf Genauigkeit keinen Anspruch machen (Zschr. f. phys. Chem. 1. p. 70 1887).

3) Mackenzie, l. c. p. 438 f.

4) Wroblewski, Wied. Ann. 18. p. 290. f. 1883.

eine Atmosphäre nicht erreichen, so hat man nur Sorge zu tragen, dass das Gas sich bereits zu Anfang des Versuchs auf dem gewünschten Druck befindet, was mit Hülfe des Manometers leicht bewerkstelligt werden kann.¹⁾

Das Princip der Methode ist dasselbe, wie bei Bunsen. Die Flüssigkeit absorbiert, während sie auf constanter Temperatur erhalten wird, und man bestimmt das absorbierte Volumen, indem man Quecksilber einlaufen lässt und den Druck des Gases misst.

Der von mir verwendete Apparat ist im grossen und ganzen der von Hrn. G. Wiedemann construirte und von Mackenzie bereits zu seiner oben angeführten Arbeit benutzte und auch daselbst beschriebene. Er besteht (Fig. 7) aus einer 73,5 cm langen Röhre *RR* von 22,8 mm äusserem Durchmesser, welche oben in eine Capillare *kk* ausläuft, die jedoch nicht wie bei Mackenzie rechtwinklig, sondern im spitzen Winkel umgebogen ist.²⁾ Diese trägt an ihrem Ende einen Schliff *s* und ist mit einem Hahne *c* verschliessbar. Das Rohr *RR* ist an seinem unteren Ende mit einem Hahne *a* versehen und durch einen dritten Hahn *b*, der sich in 9,5 cm Abstand von unten befindet, in zwei getrennte Räume *A* und *B* getheilt, deren unterer, kleinerer *A* zur Aufnahme der Flüssigkeit, deren oberer grösserer *B* zur Aufnahme des Gases bestimmt ist. Die Hähne *a* und *b* haben eine Durchbohrung von 5 mm Weite. Am unteren Ende besitzt der Apparat noch einen Ansatz *C*, welcher bei der Füllung des Apparates mit Flüssigkeit, auf welche wir später zurückkommen, seine Verwendung findet. Dieser Apparat wird in einen weiten Blechmantel *M* von 70 cm Länge eingesetzt (Fig. 10), welchen

1) Die Bemerkung Wroblewski's, dass sowohl der Bunsen'sche als auch der Wiedemann'sche Apparat nur bei Drucken zu arbeiten gestatten, die niedriger sind, als der atmosphärische (Wied. Ann. 18. p. 291. 1883), ist nur für den Bunsen'schen Apparat zutreffend, wie schon erwähnt wurde. Die Wiedemann'sche Methode gestattet durch entsprechende Verlängerung des Manometers sehr wohl, bei höheren Drucken zu arbeiten; allerdings würde dieselbe, wegen der Schwierigkeit der Handhabung des Apparates, vielleicht bei zwei Atmosphären seine Grenze erreichen. Wroblewski hat freilich seine Bestimmungen für Drucke gemacht, die diese Grenze übersteigen.

2) S. w. u.

man mit Wasser von einer bestimmten Temperatur füllt. Unten trägt derselbe eine kurze Röhre u , über welche ein Gummischlauch gezogen ist. In diesen wird der untere Ansatz C eingeschoben und mit einer Ligatur wasserdicht befestigt. Oben wird der Blechmantel mit Hülfe einer Dichtungsplatte D aus Kautschuk und einer durch drei Schrauben festgehaltenen Metallscheibe E geschlossen. Letztere trägt ebenfalls eine kurze Röhre v , in der die Capillare k durch einen in zwei Hälften geschnittenen Gummipfropf W wasserdicht festgehalten wird. In den Blechmantel sind seiner ganzen Länge nach zwei diametral gegenüberstehende Glasplatten pp eingelassen, durch welche man den Apparat in seiner ganzen Ausdehnung sehen kann, und welche die Temperatur abzulesen gestatten. Zu diesem Zwecke ist an der Röhre RR ein Thermometer T festgebunden. Um das Wasser ablassen zu können, ist der Hahn H unten am Blechmantel angebracht. Letzterer sitzt in einer auf seiner halben Höhe befestigten horizontalen Axe drehbar auf zwei Holzständern auf. An den einen derselben stösst ein grosses Brett, auf welchem das an einem kleinen Brettchen befestigte Manometer in einem Schlitz verschoben werden kann. Der eine Schenkel des Manometers biegt in einem stumpfen Winkel um und endigt in einen Konus s' , in welchen der an der Capillare befindliche Schliff s eingeschliffen ist, sodass er, leicht gefettet, luftdicht schliesst. Um das Manometer beweglicher zu machen und zu verhüten, dass die Capillare des Apparates beim Festklemmen abgedrückt wird, sind an dem kleinen verschiebbaren Brett hinten zwei Messingfedern angebracht und das Manometer selbst so locker wie möglich aufgeschraubt. Da die Capillare selbst ihrer Länge wegen etwas federte, war hierdurch genügende Beweglichkeit geschaffen.

Ein besonderer Apparat wurde zum Entgasen der Flüssigkeit hergestellt (Fig. 8 und 9). Derselbe bestand aus einem Kolben K , der ungefähr 650 ccm fasste und mit einem doppelt durchbohrten Kautschukstopfen versehen war, durch welchen zwei Glasrohre r und r' gingen, die beide nur bis in den obersten Theil des Halses reichten. Das Rohr r' war rechtwinklig umgebogen, ungefähr 30 cm lang und mit einem Hahn n versehen. Er führte unter Zwischen-

schaltung eines dickwandigen Kautschukschlauches, damit man *K* abnehmen konnte, in einen zweiten Kolben *S*, Fig. 9, der durch ein zweites, bis auf seinen Boden reichendes Rohr *l* mit einer sehr guten Wasserluftpumpe in Verbindung stand, und dazu diente, bei einem etwaigen Zurückschlagen der Pumpe zu verhindern, dass das Wasser aus der Wasserleitung in den Entgasungskolben *K* stieg. War in den Sicherheitskolben *S* Wasser gelaufen, so wurde es durch das lange Rohr *l* wieder abgesaugt. Die andere, kürzere Röhre *r* des Entgasungskolbens *K* war geradlinig und diente dazu, die Flüssigkeit in den Apparat überzuführen. Sie war ebenfalls durch einen Hahn *m* verschliessbar. Die Flüssigkeit wurde in diesem Kolben eine bis anderthalb Stunden lang unter einem Druck von höchstens anderthalb Centimetern Quecksilber heftig gekocht. Zu diesem Zwecke war der Entgasungskolben in ein Wasserbad von 100° gesetzt. Da der Hahn *n* infolge der heissen Alkoholdämpfe, denen er ausgesetzt war, sehr leicht undicht wurde, so war, um diese zu condensiren, die Röhre *r'* in eine mit Eis gefüllte Rinne gelegt. Man erreichte dadurch auch eine Beschränkung des Druckes der Alkoholdämpfe auf ein Minimum, und auf diese Weise eine möglichst grosse Verdünnung. Später wurde der Hahn *n* durch einen Quetschhahn, der den Kautschukschlauch zwischen *K* und *S* zusammenpresste, ersetzt, und dadurch die Störungen durch Undichtwerden von *n* fast vollständig vermieden.

Die Beobachtungen habe ich in folgender Weise angestellt. Nachdem der Apparat mit Alkohol und Aether gereinigt und namentlich alles Fett aus der Capillare¹⁾ entfernt war, wurde er getrocknet, dann der Entgasungskolben *K* mit dem betreffenden Gemisch, welches ich aus destillirtem Wasser und über Kalk destillirtem Alkohol herstellte, gefüllt, mit der Luftpumpe in der oben angegebenen Weise verbunden und in das Bad von 100° gebracht. Während der Entgasung der Flüssigkeit wurde in den Apparat mit Hülfe einer Ventilluftpumpe Quecksilber eingesaugt, was ohne Mühe unter vollständiger Vermeidung von Luftblasen

1) Die Capillare wurde durch das Quecksilber, welches beim Hindurchtreten durch den Hahn *c* fettig wurde, sehr leicht verunreinigt.

vor sich ging, die Capillare *k* mit dem Kohlensäureentwicklungsapparat verbunden und das Quecksilber durch die Kohlensäure verdrängt. Die Kohlensäure wurde aus Marmor mit Salzsäure entwickelt, in doppeltkohlensaurem Natron gewaschen, um die Salzsäuredämpfe zu zerstören, nochmals durch Wasser geleitet und in einem Perlenrohr durch Schwefelsäure getrocknet. War alles Quecksilber ausgeflossen, so wurde der Apparat umgekehrt, zur grösseren Sicherheit die Kohlensäure noch eine Weile durchgeleitet und sodann die Hähne *b* und *c* geschlossen, sodass das Gas unter dem jeweiligen Barometerstand den Raum *B* erfüllte. Sodann wurde der Apparat mit dem Ansatz *C* nach oben aufgestellt, der Hahn *n* am Entgasungskolben geschlossen, dieser vom Sicherheitskolben abgenommen und ebenfalls umgedreht, sodass man den Kautschukstopfen *e* (Fig. 7) in den Ansatz *C* einsetzen konnte. Dieser Stopfen *e* war noch ein zweites mal von einer Röhre *g* durchsetzt, welche zu einer Quecksilberluftpumpe führte und den für die Flüssigkeit bestimmten Raum *A* auszupumpen gestattete. Dieses Auspumpen wurde fortgesetzt, bis der Druck in *A* nur noch ca. 5 mm betrug. Da der Ballon der Quecksilberluftpumpe sehr gross war, so war in dem verhältnissmässig sehr kleinen Raume *A*, welcher nur 29,21 ccm fasste, sehr wenig Luft vorhanden, namentlich da der ziemlich umfangreiche Trockenapparat der Pumpe ebenfalls mit ausgepumpt war. Sodann wurde die Pumpe abgeschlossen und der Hahn *m* geöffnet. Der Druck des Dampfes trieb die Flüssigkeit ohne Schwierigkeit in den Raum *A* hinein, nöthigenfalls konnte durch Erwärmen des Bodens von *K* mit heissen Tüchern nachgeholfen werden. War *A* gefüllt, so wurde der Hahn *a* geschlossen und *b* geöffnet, sodass die Flüssigkeit nach *B* laufen und dort Kohlensäure absorbiren konnte. Lief, wie es bei sehr verdünnten Alkoholen und Wasser regelmässig eintrat, die Flüssigkeit nicht von selbst nach *B*, so wurde durch Schütteln nachgeholfen. Dann wurde der Apparat in den Blechmantel *M* eingesetzt, derselbe mit Wasser von ungefähr 20° gefüllt und der Mantel durch die Platte *E* geschlossen. Nachdem schliesslich noch der Schliff *s* und der daran stossende Theil der Capillare bis zum Hahne *c* mit Quecksilber gefüllt waren, wurde das Mano-

meter angeschoben und der Hahn *c* geöffnet, worauf eine gewisse Menge Quecksilber in den Apparat einfluss. Es wurde dann so viel Quecksilber in den offenen Schenkel des Manometers nachgegossen, bis dasselbe in der Capillare über *c* stand, dann wurde *c* geschlossen, das Manometer vom Apparate getrennt und von neuem geschüttelt. Dabei wurde dafür Sorge getragen, dass das Quecksilber im rechten Schenkel des Manometers denselben Stand behielt, was dadurch erreicht wurde, dass man den Dreiwegehahn *J* schräg stellte. Hatte man geschüttelt, so füllte man den Konus *s'* mit Quecksilber und setzte die beiden Schenkel des Manometers, erst wenn dasselbe luftdicht angeschoben war, in Verbindung. Man hatte auf diese Weise genau den Druck, der vor dem Schütteln herrschte. Dies Verfahren wurde so lange fortgesetzt, bis der Stand des Manometers sich nach Oeffnen des Hahnes *c* nicht mehr änderte, als Zeichen, dass die Absorption beendet war. Um ganz sicher zu gehen, wurde, wenn die Constanz eingetreten war, noch ein- oder zweimal geschüttelt und der Versuch erst als abgeschlossen betrachtet, wenn sich auch dann der Stand im Manometer nicht mehr änderte. War dies der Fall, so wurde die Temperatur, der Barometerstand und der Stand des Manometers notirt, der Apparat aus dem Mantel *M* herausgenommen und das eingeflossene Quecksilber abgelassen, nachdem man zuvor das im Schliff befindliche Quecksilber durch Klopfen entfernt hatte. Schliesslich wurde das Quecksilber getrocknet und gewogen. Die Dauer eines Versuches belief sich einschliesslich der Entgasung und Füllung auf etwas über vier Stunden.

Ehe wir zur Berechnung der Versuche und zu diesen selbst übergehen, mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden, welche die Abweichungen dieser Methode von der von Mackenzie verwendeten rechtfertigen sollen. Dies wird uns zugleich Gelegenheit geben, die Fehlerquellen der Methode klarzulegen. Wie eben erwähnt, wurde der Druck des Manometers durch das Kathetometer abgelesen. Damit dies genauer und bequemer geschehen konnte, war die Capillare in der oben angegebenen Weise schief nach unten gebogen. Man konnte so sehr genau auf die Quecksilberkuppe ein-

stellen, während bei wagrechter Stellung der Capillare dies nicht so gut möglich ist. Ausserdem konnte auf diese Weise der Konus s' vor dem Zusammenschieben stets mit Quecksilber gefüllt werden, wodurch vermieden wurde, dass Luft in den Schliff s und beim Einlaufen des Quecksilbers in den Apparat gelangte. Dieselbe Aenderung nahm bereits Hr. Hüfner¹⁾ vor, da er ebenfalls fand, dass die Messung des Druckes bei horizontaler Biegung des Rohres ungenau wurde. Er traf jedoch die Einrichtung, statt des einfach durchbohrten Hahnes c einen Zweiwegehahn an der Stelle der Umbiegung anzubringen und unmittelbar an diesen den Schliff s anzusetzen, sodass der schiefabsteigende Schenkel nur durch das Manometer gebildet wurde. Er war somit genöthigt, stets bis zu jenem Hahn das Quecksilber einzustellen, wenn er nicht beim Auseinandernehmen Gas verlieren wollte. Dies ist aber eine neue Fehlerquelle, da die Einstellung, der geringen Durchsichtigkeit der Schliffe wegen, mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Die Hauptschwierigkeit besteht aber darin, die Flüssigkeit vollkommen zu entgasen, und sie, ohne dass sie mit Luft in Berührung kommt, in den Apparat zu bringen. Die Physiker, welche bis jetzt die Absorptionserscheinungen untersuchten, entgasten ihre Flüssigkeiten entweder nur durch stundenlanges Kochen, wie die Herren Bunsen²⁾ und Naccari und Pagliani³⁾, oder nur durch Auspumpen wie Mackenzie⁴⁾ und Hüfner.⁵⁾ Beide Verfahren erscheinen mir ungenügend, und ich habe die Erfahrung gemacht, dass man zu besseren Resultaten gelangt, wenn man beides verbindet. Namentlich genügt das blosse Auspumpen keineswegs.⁶⁾ Die Flüssigkeit muss nach dem Auskochen wie in

1) Hüfner, Journ. f. prakt. Chem. **22**, p. 368. 1880.

2) Bunsen, Gas. Meth. p. 151.

3) Naccari u. Pagliani, Atti d. R. Acad. d. Scienze di Torino **15**, p. 284. 1880 u. Nuov. Cim. (3) **7**, p. 85. 1880.

4) Mackenzie, Wied. Ann. **1**, p. 440. 1877.

5) Hüfner, Journ. f. prakt. Chem. **22**, p. 362. 1880.

6) Wie auch Setschenow (Bull. de Pétersb. **22**, p. 103, 1876) für zähe Flüssigkeiten bemerkt.

meter angeschoben und der Hahn *c* geöffnet, worauf eine gewisse Menge Quecksilber in den Apparat einfluss. Es wurde dann so viel Quecksilber in den offenen Schenkel des Manometers nachgegossen, bis dasselbe in der Capillare über *c* stand, dann wurde *c* geschlossen, das Manometer vom Apparate getrennt und von neuem geschüttelt. Dabei wurde dafür Sorge getragen, dass das Quecksilber im rechten Schenkel des Manometers denselben Stand behielt, was dadurch erreicht wurde, dass man den Dreiwegehahn *J* schräg stellte. Hatte man geschüttelt, so füllte man den Konus *s'* mit Quecksilber und setzte die beiden Schenkel des Manometers, erst wenn dasselbe luftdicht angeschoben war, in Verbindung. Man hatte auf diese Weise genau den Druck, der vor dem Schütteln herrschte. Dies Verfahren wurde so lange fortgesetzt, bis der Stand des Manometers sich nach Oeffnen des Hahnes *c* nicht mehr änderte, als Zeichen, dass die Absorption beendet war. Um ganz sicher zu gehen, wurde, wenn die Constanz eingetreten war, noch ein- oder zweimal geschüttelt und der Versuch erst als abgeschlossen betrachtet, wenn sich auch dann der Stand im Manometer nicht mehr änderte. War dies der Fall, so wurde die Temperatur, der Barometerstand und der Stand des Manometers notirt, der Apparat aus dem Mantel *M* herausgenommen und das eingeflossene Quecksilber abgelassen, nachdem man zuvor das im Schliff befindliche Quecksilber durch Klopfen entfernt hatte. Schliesslich wurde das Quecksilber getrocknet und gewogen. Die Dauer eines Versuches belief sich einschliesslich der Entgasung und Füllung auf etwas über vier Stunden.

Ehe wir zur Berechnung der Versuche und zu diesen selbst übergehen, mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden, welche die Abweichungen dieser Methode von der von Mackenzie verwendeten rechtfertigen sollen. Dies wird uns zugleich Gelegenheit geben, die Fehlerquellen der Methode klarzulegen. Wie eben erwähnt, wurde der Druck des Manometers durch das Kathetometer abgelesen. Damit dies genauer und bequemer geschehen konnte, war die Capillare in der oben angegebenen Weise schief nach unten gebogen. Man konnte so sehr genau auf die Quecksilberkuppe ein-

stellen, während bei wagrechter Stellung der Capillare dies nicht so gut möglich ist. Ausserdem konnte auf diese Weise der Konus s' vor dem Zusammenschieben stets mit Quecksilber gefüllt werden, wodurch vermieden wurde, dass Luft in den Schliff s und beim Einlaufen des Quecksilbers in den Apparat gelangte. Dieselbe Aenderung nahm bereits Hr. Hüfner¹⁾ vor, da er ebenfalls fand, dass die Messung des Druckes bei horizontaler Biegung des Rohres ungenau wurde. Er traf jedoch die Einrichtung, statt des einfach durchbohrten Hahnes c einen Zweigegehahn an der Stelle der Umbiegung anzubringen und unmittelbar an diesen den Schliff s anzusetzen, sodass der schiefabsteigende Schenkel nur durch das Manometer gebildet wurde. Er war somit genöthigt, stets bis zu jenem Hahn das Quecksilber einzustellen, wenn er nicht beim Auseinandernehmen Gas verlieren wollte. Dies ist aber eine neue Fehlerquelle, da die Einstellung, der geringen Durchsichtigkeit der Schliffe wegen, mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Die Hauptschwierigkeit besteht aber darin, die Flüssigkeit vollkommen zu entgasen, und sie, ohne dass sie mit Luft in Berührung kommt, in den Apparat zu bringen. Die Physiker, welche bis jetzt die Absorptionserscheinungen untersuchten, entgasen ihre Flüssigkeiten entweder nur durch stundenlanges Kochen, wie die Herren Bunsen²⁾ und Naccari und Pagliani³⁾, oder nur durch Auspumpen wie Mackenzie⁴⁾ und Hüfner.⁵⁾ Beide Verfahren erscheinen mir ungenügend, und ich habe die Erfahrung gemacht, dass man zu besseren Resultaten gelangt, wenn man beides verbindet. Namentlich genügt das blosses Auspumpen keineswegs.⁶⁾ Die Flüssigkeit muss nach dem Auskochen wie in

1) Hüfner, Journ. f. prakt. Chem. 22. p. 368. 1880.

2) Bunsen, Gas. Meth. p. 151.

3) Naccari u. Pagliani, Atti d. R. Acad. d. Scienze di Torino 15. p. 284. 1880 u. Nuov. Cim. (3) 7. p. 85. 1880.

4) Mackenzie, Wied. Ann. 1. p. 440. 1877.

5) Hüfner, Journ. f. prakt. Chem. 22. p. 362. 1880.

6) Wie auch Setschenow (Bull. de Pétersb. 22. p. 103. 1876) für zähe Flüssigkeiten bemerkt.

einem Pulshammer mit deutlich metallischem Ton gegen die Glaswand anschlagen.¹⁾

Die von mir angewendete Methode liefert sehr luftfreie Flüssigkeit. Leider ist es aber schwer, den Zutritt der Luft zur Flüssigkeit während des Einfüllens vollständig zu verhindern, weil, wie oben erwähnt, der Hahn *n* infolge der Einwirkung des Alkoholdampfes sehr leicht undicht wird. In diesem Falle wurde durch festes Eindrehen des Hahnes der Zufluss der Luft möglichst beschränkt und das Auspumpen von *A* sehr beschleunigt. Sobald beim Einlaufen der Flüssigkeit in *A* eine Druckzunahme im Kolben bemerkbar war, wofür die Heftigkeit des Einströmens ein sehr gutes Kriterium ist, wurde der Versuch unterbrochen. Unangenehmer war das Undichtwerden des Hahnes *m*, da in diesem Fall die Flüssigkeit nur sehr schwer in den Apparat getrieben werden konnte, weil der Druck der bei *m* eintretenden Luft sie zurückhielt. In diesem Fall wurde der Versuch sofort unterbrochen, sobald es nicht durch schleuniges Erwärmen gelang, die Flüssigkeit in den Apparat zu treiben. Die beiden Hähne, namentlich aber *n*, wurden so häufig undicht, dass von drei angestellten Versuchen nur einer brauchbar war. Die Gummipfropfen und die Verbindungen durch Kautschukröhren gaben zwar auch Anlass zum Undichtwerden, jedoch konnte hier durch festes Einsetzen und durch Ligaturen jeder Luftzufluss vermieden werden. Die Hähne *a* und *b* wurden selten undicht. Es war dies auch ungefährlich, weil das Wasser des Bades als Dichtungsmittel wirkte. Indessen kam es doch einige mal vor, dass der Hahn *b* durch das eingeflossene Quecksilber, wenn auch nicht direct herausgedrückt, so doch soweit gelockert wurde, dass die Kohlensäure in Blasen durch ihn austreten konnte. Wurde dies bemerkt, so wurde natürlich der Versuch sofort unterbrochen.

Bei sehr verdünnten Alkoholen und bei Wasser stellte sich der Uebelstand ein, dass die Flüssigkeit den Raum *A* nur schwer vollständig anfüllte und gewöhnlich erst durch Schütteln dazu zu bringen war. Manchmal kam es auch vor, dass sich ein Wassertropfen in dem Hahn *m* festsetzte

1) Das Weitere siehe in der Dissertation.

und durch seine Oberflächenspannung weiteres Einfließen verhinderte, sodass der letzte kleine Theil von *A* direct unterhalb des Hahnes *a* leer blieb. War es weder durch Erwärmen, noch durch Schütteln möglich, diesen Theil zu füllen, so wurde die Blase geschätzt und vom Volumen abgezogen. Sie betrug übrigens nie mehr als höchstens $\frac{1}{2}$ ccm.

In der Capillare setzten sich häufig Wasser- und Quecksilbertropfen fest, welche durch ihre Oberflächenspannung in völlig unbestimmbarer Weise den Druck beeinflussen mussten. Dieselben wurden entfernt, indem man Quecksilber aus dem linken Schenkel des Manometers auslaufen liess und vorsichtig wieder Quecksilber auffüllte, bis dasselbe wieder in der Capillare stand. Es wurden aber trotzdem im Schliess sehr leicht Tröpfchen wieder abgerissen.

Es wurde dafür Sorge getragen, dass sich die Temperatur des Bades nur wenig von 20° entfernte.

Endlich änderte sich der Procentgehalt des Alkohols während des Auskochens. Da aus den oben angeführten Gründen auf das Sieden bei der Entgasung nicht verzichtet werden konnte, so war es unmöglich, bei zwei Versuchen Alkohol gleicher Verdünnung zu erhalten. Um nun den Procentgehalt genau zu ermitteln, wurde das specifische Gewicht des bei der Füllung übrig gebliebenen Restes bestimmt. Die Aenderung des specifischen Gewichtes durch die Absorption von Luft musste dabei freilich vernachlässigt werden. Zur Bestimmung des specifischen Gewichtes wurde eine feine Wage mit Senkkörper verwandt. Die Fettmengen, mit denen sich der Alkohol verunreinigte, waren so gering, dass ihr Einfluss vernachlässigt werden konnte.

Von grösserem Einfluss war vielleicht der Umstand, dass sich der absolute Alkohol, und nur dieser, beim Versuch trübte¹⁾, indem während des Schüttelns die im Quecksilber gelösten Metalle oxydirt wurden und einen schwarzen Schlamm abschieden, welcher die Trübung veranlasste.

1) Dasselbe bemerkte Hr. Bunsen bei Absorption von Sauerstoff in Wasser, während er bei der Absorption dieses Gases in Alkohol nichts derartiges wahrnahm. (Gas. Meth. p. 163 und 167). Der Grund scheint darin zu liegen, dass der Alkohol vorher Sauerstoff absorbirt hatte und in ozonisirtem Zustande auch beim Entgasen festhielt.

Zur Berechnung des Absorptionscoëfficienten wurde die bekannte Bunsen'sche Formel angewendet, jedoch mit einigen Modificationen. Es sei V das Volumen des Gases vor der Absorption oder, was dasselbe ist, das des Raumes B . Der Druck vor der Absorption sei P , derselbe nach der Absorption sei P' . Das Volumen des eingelaufenen Quecksilbers sei v , die Temperatur des Bades sei t . Dann ist die Gewichtsmenge des Gases vor der Absorption:

$$\frac{VP}{760(1 + \alpha t)} s,$$

wenn s das spezifische Gewicht der Kohlensäure ist. Das nach der Absorption übrig gebliebene Gewicht ist:

$$\frac{(V - v)P'}{760(1 + \alpha t)} s.$$

Das beim Drucke P' absorbirte Gewicht ist dann die Differenz der beiden:

$$\frac{VP}{760(1 + \alpha t)} s - \frac{(V - v)P'}{760(1 + \alpha t)} s.$$

Die beim Druck 760 absorbirte Gewichtsmenge ist demnach, wenn das Henry'sche Gesetz angewendet wird:

$$\frac{VP}{P'(1 + \alpha t)} s - \frac{V - v}{1 + \alpha t} s.$$

Lässt man hier s fort, so erhält man das absorbirte Volumen, und dieses dividirt durch das Volumen der Flüssigkeit, welches F heisse, gibt den Bunsen'schen Absorptionscoëfficienten:

$$\beta = \frac{1}{F} \left\{ \frac{VP}{P'(1 + \alpha t)} - \frac{V - v}{1 + \alpha t} \right\}.$$

Ist τ die Temperatur des Zimmers in dem Momente, wo der Apparat mit Kohlensäure gefüllt wurde, so ist, wenn B den Barometerstand bezeichnet:

$$P = B \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha \tau},$$

da sich die Drucke wie die zugehörigen $1 + \alpha t$ verhalten. Der Druck P' setzt sich zusammen aus:

$$P' = B + p - e,$$

wo p den Druck im Manometer — der positiv und negativ sein kann —, und e die Spannung des Dampfes der Mischung bezeichnet. Demnach lautet die Formel:

$$\beta = \frac{1}{F} \left\{ V \frac{B}{B+p-e} \cdot \frac{1}{1+\alpha t} - \frac{V-v}{1+\alpha t} \right\}.$$

Das eingeflossene Volumen ist durchaus nicht gleich dem Volumen des absorbirten Gases, sondern es unterscheidet sich von diesem durch die Volumenänderung, welche infolge der Zu- oder Abnahme des Druckes entstanden ist. Diese letzteren beiden Volumenänderungen werden durch die Reduction auf 0° und 760 mm Druck eliminirt, es ist aber dabei vorausgesetzt, dass das Volumen V sich nicht geändert hat, oder mit anderen Worten, dass es gleich dem Volumen von B erhalten wird. Dies erreicht man, indem man alles in der Capillare k bis zum Hahn c befindliche Quecksilber zum eingeflossenen rechnet und also den Hahn c gewissermassen als Marke betrachtet, bis zu der man einstellt.¹⁾ Dies Verhältniss wird noch klarer, wenn man sich das über c befindliche Quecksilber zu dem eingeflossenen gebracht denkt und dafür die entsprechende Höhe Quecksilber im rechten offenen Schenkel wegnimmt. Der Druck bleibt dadurch ungeändert, und man sieht so direct, dass das eingeflossene Volumen, von V abgezogen, das übrig bleibende Volumen unter dem Druck nach dem Versuch gibt.

Es wurde hiernach beobachtet vor der Absorption 1) die Temperatur des Zimmers, 2) der Barometerstand; nach der Absorption 1) die Temperatur des Bades, 2) der Ueberdruck im Manometer, 3) das Gewicht des eingeflossenen Quecksilbers, 4) das specifische Gewicht des Alkohols.

Für die Berechnung der Versuche fehlt noch die Kenntniss von e . Es existiren über die Spannkkräfte verdünnter Alkohole zwei Arbeiten, eine von Hrn. Wüllner²⁾ und eine von Hrn. Konowalow.³⁾ Leider konnte ich die in letzterer gegebenen Werthe nicht verwerthen, da die Beobachtungen

1) Vgl. Hüfner, Journ. f. prakt. Chem. 22. p. 368. 1880.

2) Wüllner, Pogg. Ann. 129. p. 352. 1866.

3) Konowalow, Wied. Ann. 14. p. 34 u. 219. 1881.

erst bei 20° aufangen, in Intervallen von 20 zu 20° fortschreiten und erst zwischen 60 und 80° zahlreicher werden. Die Curven, welche die Abhängigkeit der Spannkraft von der Concentration darstellen, gehen sogar nur bis 40° abwärts. Es war also so gut wie unmöglich, aus diesen Zahlen auch nur mit einiger Sicherheit die Spannungen der verdünnten Alkohole bei meinen Temperaturen zu berechnen. Dies ist allerdings leichter bei den Zahlen des Hrn. Wüllner, dessen Versuche in viel kleineren Intervallen fortschreiten, allein dieser hat nur für fünf verschiedene Alkohole genaue Untersuchungen angestellt, welche bis zu einem Procentgehalt von 33,3 Proc. abwärts gehen. Für wasserreichere Alkohole beschränkt er sich darauf, den Werth des Quotienten μ/π anzugeben, wo μ die Spannung des verdünnten Alkohols und π die Summe der Spannungen des Wassers und des absoluten Alkohols ist, und zwar gibt er diesen Quotienten nur an für 10 und 45° mit der Bemerkung, dass er über 45° constant zu sein schiene. Ich suchte nun die Spannungen folgendermassen zu ermitteln. Aus den Wüllner'schen Tabellen wurden die Werthe für die Spannkraft, bezogen auf die Temperaturen, auf Coordinatenpapier aufgetragen und die Punkte mit Hülfe eines Curvenlineals durch die passendste Curve verbunden. Für Alkohole von niedrigerer Concentration als 33,3 Proc. hatte man allerdings nur drei Punkte, nämlich für 10°, für 45° und irgend eine Temperatur über 45°, wegen der Constanz von μ/π . Es war also auch hier die Spannkraft sehr unsicher. Jedoch hatte man eine Controle, wenn man mit Hülfe dieser Curve die Spannkraft als Functionen der Concentrationen auftrug. Man hatte so nur zwischen den Spannkraften von Alkohol von 33,3 Proc. und Wasser keinen Punkt. Verband man hier wieder durch eine Curve, so war diese ziemlich genau bestimmt, da die Curve sehr flach verläuft und sich sehr an die Gerade anschliesst.¹⁾ Solche Curven wurden für 10, 13, 15, 18, 20 und 22° gezeichnet und die Spannkraft für die zwischenliegenden Temperaturen durch Interpolation berechnet, unter der Annahme, dass dieselben in

1) Vgl. auch die Curve von Hrn. Konowalow, für 40°. Wied. Ann. 14. Taf. II. 1881.

einem Intervall von 2 bis 3° der Temperaturdifferenz proportional wachsen. Es mag dies Verfahren ziemlich roh und ungenau erscheinen, es ist aber gerechtfertigt durch folgende Betrachtung. Nimmt man an, dass sich p , der Ueberdruck im Manometer, und e , die Spannkraft der Alkoholdämpfe, gegenseitig aufheben, was man stets einrichten kann¹⁾, so wird der Druck nach dem Versuch nicht viel vom Druck der Atmosphäre, also von 760 mm abweichen. Die Spannkraft des absoluten Alkohols, die höchste, welche überhaupt vorkommen kann, beträgt bei 20° 44,5 mm. Nimmt man an, dieselbe sei um 60 Proc. falsch bestimmt, so würde dies einer Differenz von 26,6 mm entsprechen. Dies gibt aber für den Druck 760 mm eine Abweichung von 3,5 Proc. Die Spannkraftcurve der verdünnten Alkohole für 20° liegt aber zwischen den Werthen 17,4 und 44,5 mm, was ungefähr einer Abweichung von 60 Proc. entspricht, wenn man die extremsten Werthe in Rechnung zieht. Es dürfte also die grösste Abweichung im ungünstigsten Falle 10 bis 15 Proc. betragen, was noch nicht 1 Proc. Fehler im Resultate ergibt.

Es wurde nun zunächst auf die oben angegebene Weise der Absorptionscoefficient des Wassers für Kohlensäure bestimmt, und die Versuche wurden fortgesetzt, bis die Resultate unter sich stimmten. Folgende Tabelle gibt die Resultate. Die Buchstaben bedeuten dieselben Grössen wie bei Aufstellung der Formeln p. 34. Es ist also gegeben der Reihe nach Temperatur τ vor der Absorption (Temperatur des Zimmers), Temperatur t während der Absorption (Temperatur des Bades), Druck P vor der Absorption, Druck P' nach der Absorption, Volumen v nach der Absorption. Dann folgt das Volumen des absorbirten Gases, gemessen unter dem Druck P' . Es wurde das letztere so berechnet, dass von dem eingelaufenen Volumen v der Theil abgezogen wurde, welcher infolge der Temperatur- und Druckänderung eingelaufen war. Ist nämlich das Volumen bei der Temperatur τ und dem Drucke P gleich V , so hat es bei t° und dem Drucke P' den Werth:

$$V' = V \frac{P}{P'} \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha \tau},$$

1) Es war sogar p stets grösser als e , d. h. P' grösser als 760 mm.

folglich ist die gesuchte Volumenänderung gleich:

$$V \left(1 - \frac{P}{P'} \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'} \right)$$

und das absorbirte Volumen A :

$$A = v - V \left(1 - \frac{P}{P'} \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'} \right).$$

Die nächste Columnne enthält den gefundenen Absorptionscoefficienten β , die folgenden den aus dem Mittelwerth mittelst Interpolation auf die Temperatur des Versuchs reducirten Absorptionscoefficienten. Dann ist dieser Mittelwerth für die mittlere Temperatur $18,9^\circ$ und endlich der von Bunsen für $19,0^\circ$ gefundene Werth angeführt.

τ	t	P	P'	v	A	β beob.	β ber.	β Mittel	β nach Bunsen
		mm	mm	ccm	ccm				
20,0°	19,2°	744,75	760,88	31,69	30,48	0,9234	0,9366		
20,5	19,2	750,41	772,36	33,769	29,468	0,9570	0,9366	0,9393	
19,8	18,8	745,13	772,83	34,380	29,061	0,9483	0,9407	für	
19,8	19,0	746,99	802,67	38,23	28,74	0,9269	0,9386	18,94°	0,9150
20,3	18,5	749,19	820,39	40,78	28,44	0,9372	0,9438		

$$V = 133,15 \text{ ccm}; \quad F = 29,21 \text{ ccm}.$$

Die Capillardepression in h betrug 1,2 mm.

Der Absorptionscoefficient ergibt sich also grösser als bei Bunsen. Auffallend ist das stetige Abnehmen von A .

Es fanden übrigens auch andere Physiker grössere Absorptionscoefficienten als Hr. Bunsen. So berechneten die Herren Naccari und Pagliani¹⁾ aus den Versuchen der Herren Khanikoff und Louguinine einen Werth, der den Bunsen'schen um 10,5 Proc. überschreitet. Ebenso fand Hr. Setschenow²⁾ einen grösseren Absorptionscoefficienten als Bunsen, und endlich weichen die Bunsen'schen Werthe selbst untereinander in der Weise ab, dass die später bestimmten die früheren übertreffen. Wir geben in folgender Tabelle eine Uebersicht dieser Werthe. Die erste Columnne enthält die von Bunsen aus seiner Interpolations-

1) Naccari u. Pagliani, Atti di Torino. 15. p. 279. 1880 u. Nuov. Cim. (3) 7. p. 80. 1880.

2) Setschenow, Mém. de St. Pétersb. 12. Nr. 6. p. 7. 1875.

formel berechneten Werthe¹⁾; die zweite den im Text seiner gasometrischen Methoden¹⁾ nach seinen Versuchen gegebenen Werth, die dritte den aus der Tabelle am Schlusse dieses Werks²⁾ entnommenen Werth. Zur Herstellung dieser Tabelle hat Hr. Bunsen die Versuche seiner Schüler mit verwendet.

t	Bunsen			Khanikoff u. Louguinine	Setschenow
	ber.	beob.	nach Tabelle		
15,0°	1,0020	—	1,0020	1,1073	—
15,2	0,9964	—	—	—	1,0096
19,1	0,9134	0,8963	—	—	—
19,7	0,9034	—	—	—	—

Die Versuche mit Alkohol wurden in einer ganz willkürlichen Reihenfolge angestellt, um constante Fehler möglichst zu eliminiren. Sie sind in folgender Tabelle zusammengestellt, und zwar enthält die erste Columne die Temperatur des Bades bei Beendigung der Absorption, die zweite die specifischen Gewichte, die dritte die Temperatur, bei der dieselben bestimmt wurden. Die beiden folgenden Reihen geben die aus der Tabelle der Hrn. Landolt und Börnstein³⁾ durch Interpolation berechneten Procentgehalte nach Volumen und nach Gewicht, sodann folgen die Absorptionscoëfficienten, und in der letzten Columne ist das Datum des Versuches aufgezeichnet.

t	Spec. Gew.	Temp.	Volum- proc.	Gewichts- proc.	β	Datum
20,3°	0,9980	—	1,3	1,07	0,8606	14. Nov.
20,2	0,9850	16,4°	7,4	5,96	0,8613	17. "
20,0	0,9686	—	27,7	22,76	0,8410	24. "
19,5	0,9597	22,4	34,4	28,46	0,7918	1. Aug.
19,2	0,9556	20,0	37,6	31,17	0,8012	2. "
14,6	0,9543	17,0	38,5	32,03	0,8766 ⁴⁾	19. Oct.
18,8	0,9400	20,0	47,9	38,68	0,8400	4. Aug.
20,1	0,9353	17,0	49,5	42,15	0,8773	3. Dec.
19,1	0,9216	—	56,8	49,00	0,9820	21. Nov.
18,6	0,9150	21,4	59,24	51,44	1,0065	30. Juli

1) Bunsen, Gas. Meth. p. 163.

2) Bunsen, l. c. p. 299.

3) Landolt u. Börnstein, Phys. Tabellen p. 149. 1883.

4) Dieser hohe Werth erklärt sich aus der niedrigen Temperatur 14,6°.

<i>t</i>	Spec. Gew.	Temp.	Volum- proc.	Gewichts- proc.	β	Datum
19,9°	0,8699	18,8°	77,8	71,06	1,2930	24. Oct.
19,7	0,8501	19,9	84,8	78,10	1,7680	27. "
20,4	0,8351	16,0	89,06	85,30	1,9740	2. Nov.
17,3	0,8072	20,0	97,3	95,81	2,0296	8 Aug.
20,3	0,7970	19,6	99,5	99,20	2,6553	19. Nov.
19,7	0,7954	19,0	99,8	99,71	2,7193	20. "

Verfolgen wir den Verlauf des Absorptionscoefficienten, so tritt uns die eigenthümliche Thatsache entgegen, dass derselbe mit steigender Concentration zunächst fällt, bis er bei ungefähr 28 Proc. nach Gewicht ein deutliches Minimum zeigt, dann steigt er wieder, erreicht bei ungefähr 45 Proc. den Werth des Absorptionscoefficienten des Wassers und steigt dann sehr schnell weiter bis zum Absorptionscoefficienten des Alkohols. Die auf Fig. 11 gezeichnete Curve gibt diesen Verlauf wieder. Hier ist das Intervall zwischen den Absorptionscoefficienten des Wassers und des absoluten Alkohols gleich 100 gesetzt und die gefundenen Zahlen hierauf reducirt.

Es fragt sich zunächst, wie sich die anderen physikalischen Eigenschaften des verdünnten Alkohols verhalten.

Die Herren Dupré und Page¹⁾ bestimmten die Wärmeentwicklung und die Contraction des Volumens genauer. Es zeigt sich hier ein Maximum bei 30 Proc. Um diese Zahlen zu prüfen, habe ich noch einige Versuche angestellt, indem ich in einem Messgläschen abgemessene Volumina beider Flüssigkeiten in einem vorher möglichst gut polirten Messingcalorimeter, welches sehr dünnwandig und möglichst leicht war, zusammengoss. Beide Flüssigkeiten hatten dieselbe Temperatur, was durch Messung controlirt wurde. Können die Versuche schon wegen der Unsicherheit der Volumenbestimmung durchaus keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit machen, so zeigen sie doch deutlich die Uebereinstimmung mit den Zahlen von Dupré und Page.

Procents nach Volumen	10	20	27	28	29	30	35	40	70
Temperaturerhöhung	5,1	8,3	9,5	9,5	9,5	9,5	9,3	9,1	6,0.

Die Herren Bussy und Buignet²⁾ untersuchten die

1) Dupré u. Page, Phil. Trans. 1869, im Auszug Pogg. Ann. Ergbd. 5. p. 221 ff. 1871.

2) Bussy u. Buignet, Ann. de chim. et de phys. (4) 4. p. 5. 1865.

Mischungswärme sehr verschiedener Gemische. Für verdünnten Alkohol findet sich nur für 29,87 Proc. nach Volumen $9,1^\circ$ und für 50 Proc. $7,30^\circ$.

Hr. Henneberg¹⁾ untersuchte das thermische Leitungsvermögen und fand die grösste Abweichung zwischen c dem beobachteten und c_1 dem Mittelwerth aus den Leitungsvermögen von Alkohol und Wasser bei 40 Proc. nach Gewicht.

Die Contraction des Volumens bestimmte Hr. Mendelejeff²⁾ in seiner ausserordentlich sorgfältigen Arbeit sehr genau und fand sie bei 20° für 45,7 Proc. am grössten.

Genaue Bestimmungen haben wir für die spezifische Wärme, welche ausser Dupré und Page auch noch Hr. Schüller³⁾ untersuchte. Das Maximum der specifischen Wärme liegt deutlich bei 20 Proc. nach Gewicht⁴⁾, das der Abweichung der gefundenen Werthe vom Mittel aus den Werthen für Wasser und Alkohol zwischen 30 und 40 Proc.

Die Ausdehnungscoëfficienten zeigen nach Dupré und Page ein Maximum zwischen 40 und 45 Proc.

Für die Siedepunkte haben wir nach den beiden genannten Verfassern die grösste Abweichung bei 30 Proc.

Die Compressibilität wies ein deutliches Minimum bei 30 Proc. auf, während ihre Abweichung vom Mittelwerth ein Maximum bei 40 Proc. hat.

Die Capillaritätsconstante endlich zeigt ein Maximum der Abweichung vom Mittel bei 30 Proc.

Die Herren Dupré und Page ordnen nach diesem Verhalten die Eigenschaften in folgender Weise:

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| A) a) Specifische Wärme | b) Siedepunkte |
| Mischungswärme | Capillarattraction, |
| B) a) Ausdehnung | b) Compressibilität. |

Die Gruppe A hat das Maximum der Abweichung der gefundenen von den berechneten Werthen bei 30 Proc., die Gruppe B bei 40 bis 50 Proc. In den Untergruppen a) ist die Abweichung $c - c_1$ positiv, in den Untergruppen b) negativ. Ferner sind dort noch angeführt specifisches Gewicht, Brechungs-

1) Henneberg, Wied. Ann. **36**, p. 162. 1889.

2) Mendelejeff, Pogg. Ann. **138**, p. 251f. 1869.

3) Schüller, Pogg. Ann. Ergbd. **5**, p. 116 u. 192. 1871.

4) Die Procente sind im Folgenden stets nach Gewicht angegeben.

exponent¹⁾ und Volumencontraction, welche zur Gruppe B gehören. Die Verfasser lassen sich auf keine physikalische Erklärung ein, sondern führen nur an, dass ein Alkohol von 29,87 Proc. der chemischen Zusammensetzung $C_2H_5OH + 6H_2O$ und ein Alkohol von 46 Proc. der Zusammensetzung von $C_2H_5OH + 3H_2O$ entspricht. Der Absorptionscoefficient selbst zeigt ein Minimum bei 27 Proc., und seine Abweichung $c - c_1$ vom Mittel zwischen den Absorptionscoefficienten des Wassers und des absoluten Alkohols ist am grössten bei ungefähr 50 Proc.

Gewichtsproc.	$c - c_1$ in Proc. des ganzen Intervalle, Absorption des Wassers — Abs. d. absol. Alkohols	Gewichtsproc.	$c - c_1$ in Proc. des ganzen Intervalle, Absorption des Wassers — Abs. d. absol. Alkohols
10	13,25 Proc.	50	46,7 Proc.
20	25,2	60	46,1
30	35,2	70	43,9
40	42,8		

Wir haben es demnach mit vier Körpern zu thun: Wasser, Alkohol + 6 Wasser, Alkohol + 3 Wasser und Alkohol. Diese haben natürlich verschiedene physikalische Eigenschaften und sind miteinander mischbar. In welcher Weise die Mischungen der Körper die genannten Eigenschaften beeinflussen, darüber lassen sich keine Gesetze aufstellen, da die Verhältnisse zu complicirt sind. Die beiden Hydrate sind charakterisirt dadurch, dass verschiedene Eigenschaften hier entweder selbst ihren grössten oder kleinsten Werth haben oder die grösste Abweichungen von den berechneten Mittelwerthen aufweisen.

Auch bei der Schwefelsäure zeigen sich ähnliche Erscheinungen. Hr. Setschenow²⁾, der, wie schon erwähnt, der einzige ist, der bis jetzt das Absorptionsvermögen von Flüssigkeitsgemischen untersucht hat, fand denselben Verlauf der Absorptionserscheinungen in ihrer Abhängigkeit von der Concentration, wie ich für die Alkohole. Die Curve für den Absorptionscoefficienten sinkt zuerst, wenn man Wasser zu Schwefelsäure giesst, erreicht dann ein Minimum und steigt zum Absorptionscoefficienten des Wassers wieder auf. Das

1) Nach Daurer, Jahresber. d. Wiedner Communaloberrealschule 1880. p. 23 zuerst bestimmt von Deville, Ann. de chim. et de phys. (3) 5. p. 129; Pogg. Ann. 57. p. 267. 1842.

2) Setschenow, Bull. de St. Pétersb. 22. p. 102. 1876.

Minimum liegt an der Stelle der grössten Wärmeentwicklung und bei einem Procentgehalt, welcher der Zusammensetzung $\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$, also dem ersten Hydrate der Schwefelsäure entspricht. Ueber die übrigen Eigenschaften der Schwefelsäuregemische sind wir leider nicht im Besitz so ausgedehnter Messungen, wie beim Alkohol. Von der Mischungswärme haben wir schon gesprochen, sie ist der Repräsentant der Eigenschaften, welche ihr Maximum der Abweichung beim ersten Hydrate der Schwefelsäure haben, nämlich bei H_2SO_5 oder 84 procentiger Schwefelsäure. Von den übrigen Eigenschaften haben wir nur noch Untersuchungen über die Contraction, welche bei 73,1 Proc. oder dem Hydrate H_6SO_6 am grössten ist, über die specifischen Gemische und die Siedepunkte, soweit ich habe ermitteln können. Die Bestimmung der letzteren scheint sehr unsicher zu sein, da durch die Dissociation des Hydrates der Siedepunkt sich verschiebt.

Die Erscheinung tritt bei den specifischen Gewichten ziemlich deutlich hervor. Das Maximum der Abweichung liegt bei 86 Proc. Bei 60 Proc. fängt die Differenz merkwürdigerweise an, negativ zu werden, das negative Maximum liegt an keiner ausgezeichneten Stelle (bei 50 Proc.) Bei den Siedepunkten stimmt die Erscheinung nicht so gut. Das Maximum der Abweichung liegt bei 61 Proc. Die Abweichungen sind auffallend gross (102° im Maximum).

Es besteht also eine deutlich ausgesprochene Analogie zwischen verdünntem Alkohol und verdünnter Schwefelsäure. In beiden Fällen zeigen sich zwei Maxima, resp. Minima, und diese entsprechen in beiden Fällen einer bestimmten chemischen Zusammensetzung, nämlich bei Schwefelsäure den Hydraten $\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$ und $\text{H}_2\text{SO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$ und bei Alkohol den Formeln $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 6\text{H}_2\text{O}$ und $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 3\text{H}_2\text{O}$. Ferner fallen zusammen bei beiden das Minimum des Absorptionscoëfficienten und das Maximum der Mischungswärme, und zwar findet dies statt bei dem Procentgehalt, welcher den Zusammensetzungen $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 6\text{H}_2\text{O}$ und $\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$ entspricht. Die grösste Contraction des Volumens fällt auf den Procentgehalt, der sich durch $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 3\text{H}_2\text{O}$ und $\text{H}_2\text{SO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$ darstellen lässt.

Physikalisches Institut der Univ. Leipzig.

III. Beitrag zur Theorie der adiabatischen Zustandsänderungen; von A. Ritter.

(Hierzu Taf. I Fig. 4–7.)

Erste Abtheilung.

§ 1. Zustandsänderungen der Luft bei gleichförmiger Compression.

Für den Gleichgewichtszustand einer ruhenden homogenen Luftmasse gilt annäherungsweise nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze die Bedingungsgleichung:

$$(1) \quad p_0 v_0 = R T_0,$$

in welcher die Constante $R = 29,27$ zu setzen ist, wenn p_0 den Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter, v_0 das Volumen eines Kilogramms in Cubikmetern und T_0 die absolute Temperatur bedeutet. Wenn auch, wie längst bekannt, die obige Gleichung nur innerhalb eines beschränkten Gebietes die wirkliche Bedingung des Gleichgewichts darstellt, so knüpft sich doch ein gewisses Interesse an die Untersuchung der Frage: wie die atmosphärische Luft unter gewissen gegebenen Umständen bei unbeschränkter Gültigkeit des obigen Gesetzes sich verhalten würde. Aus diesem Grunde und mit diesem hier vorausgeschickten ausdrücklichen Vorbehalte soll die unbedingte Gültigkeit jenes Gesetzes einstweilen vorausgesetzt, und die atmosphärische Luft hier als ein sogenanntes „ideales“ Gas behandelt werden.

Wenn die Luftmasse in einem cylindrischen (inwendig vollkommen glatt vorausgesetzten) Rohre, dessen Querschnitt 1 qm beträgt, und dessen Wände für Wärme undurchdringlich vorausgesetzt werden, zwischen zwei beweglichen Kolben sich befindet, so muss auf jeden der beiden Kolben von aussen her eine Kraft von der Grösse p_0 wirken, um denselben im Gleichgewichte zu halten (Fig. 4_a). Eine plötzliche Vergrösserung dieser Kraft bei dem einen von den beiden Kolben (deren Massen unendlich klein vorausgesetzt werden sollen) würde das Eintreten einer Bewegung des Kolbens verursachen, an welcher anfangs nur die unmittelbar vor dem Kolben befindliche Luft theilnehmen wird, während der ganze Rest der Luftsäule nebst dem anderen Kolben einstweilen im Ruhezustande verharrt (Fig. 4_b). Wenn die Be-

wegung des Kolbens eine gleichförmige sein soll, so muss die den Kolben vorwärts schiebende Kraft p_1 stets so gross sein, wie der auf die Vorderfläche wirkende Widerstand, und da bei constant bleibender Geschwindigkeit u dieser Widerstand ebenfalls constant bleibt, so muss auch die Kraft p_1 stets dieselbe Grösse behalten, wenn die Bewegung eine gleichförmige sein soll.

Während der Bewegung wird die Länge der von dem Kolben vorwärts geschobenen comprimierten Luftsäule beständig zunehmen, insofern die einzelnen Schichten der ruhenden Luftsäule, eine nach der anderen, an die bewegte Luftsäule sich anschliessen, und da dieses Anschliessen unter beständig gleich bleibendem Drucke stattfindet, so bildet die mit der Geschwindigkeit u gleichförmig fortschreitende comprimierte Luftsäule stets eine homogene Masse, in welcher Druck, Dichtigkeit und Temperatur überall dieselben Grössen besitzen und vorläufig unverändert beibehalten.

In dem Augenblicke, wo die Vorderfläche der comprimierten Luftsäule (oder die Grenzfläche zwischen ruhender und bewegter Luft) den am jenseitigen Ende des Rohrs befindlichen ruhenden Kolben erreicht, würde dieser letztere ebenfalls in Bewegung gerathen, wenn nicht die von aussen her auf diesen Kolben wirkende Kraft, welche bis dahin die Grösse p_0 unverändert beibehalten hatte, plötzlich bis auf die der neuen Gleichgewichtsbewegung des Kolbens entsprechende Grösse p_2 vergrössert würde, was z. B. dann stattfinden würde, wenn dieser Kolben durch ein unbewegliches Hinderniss festgehalten würde (Fig. 4_c). Die ganze vorher ruhende Luftsäule hat in diesem Zeitpunkte die Geschwindigkeit u und den Zustand der comprimierten Luft angenommen.

Da der erste Kolben inzwischen fortfährt, unter Einwirkung der schiebenden Kraft p_1 mit der constanten Geschwindigkeit u sich weiter zu bewegen, so wird nunmehr an dem ruhenden Kolben, welcher in Bezug auf die bewegte Luftsäule die relative Geschwindigkeit u besitzt, eine noch stärker comprimierte ruhende Luftsäule sich bilden (Fig. 4_d), welche allmählich nach rückwärts sich verlängert, bis dieselbe von dem bewegten Kolben erreicht wird, in welchem

Zeitpunkte die ganze (ursprünglich ruhende) Gasmasse zum zweiten mal die Geschwindigkeit Null annimmt (Fig. 4_a).

In diesem Zeitpunkte müsste zugleich die den bewegten Kolben vorwärts schiebende Kraft plötzlich von der Grösse p_1 bis auf die der neuen Gleichgewichtsbedingung entsprechende Grösse p_3 zunehmen, wenn derselbe immer noch fortfahren soll, mit der Geschwindigkeit u gleichförmig sich weiter zu bewegen. An der Vorderfläche dieses Kolbens wird alsdann — in derselben Weise wie oben mit Bezug auf Fig. 4_b erklärt wurde — abermals eine noch stärker comprimirt bewegte Luftsäule sich bilden, welche allmählich sich verlängert und schliesslich den ruhenden Kolben erreicht, bei welchem dann die Bildung einer wiederum noch stärker comprimirten ruhenden Luftsäule beginnen wird, sodass in dem Augenblicke, wo dieselbe von dem bewegten Kolben erreicht wird, die Luftmasse zum dritten mal die Geschwindigkeit Null annimmt.

Bei fortdauernder gleichförmiger Bewegung des fortschreitenden Kolbens und fortdauernder Unbeweglichkeit des anderen Kolbens wird also in der anfangs ruhenden Luftsäule abwechselnd an dem einen und an dem anderen Ende stets aufs neue eine sprungweise eintretende, allmählich nach dem anderen Ende hin fortschreitende Vervielfachung der Dichtigkeit stattfinden, und dieser Vorgang wird in allmählich immer kürzer werdenden Zeitintervallen sich wiederholen, bis schliesslich beim Zusammentreffen der beiden Kolben die zwischen denselben befindliche Luft — gemäss der hier gemachten Voraussetzung einer unbeschränkten Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes — eine unendlich grosse Dichtigkeit erreicht.

Die besondere Art der Zustandsänderung, welche die Luftmasse während dieses Vorgangs erleidet, zeichnet sich vor allen anderen Arten von Zustandsänderungen durch die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit aus, dass während des Vorgangs die Luftmasse beständig aus zwei homogenen Theilen besteht, von denen der eine stets im Ruhezustande, und der andere in gleichförmig fortschreitender Bewegung begriffen ist, sodass auf jeden von den beiden Theilen stets

die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet werden können.

Aus der obigen Untersuchung ergibt sich zugleich, dass bei gleichförmiger Bewegung des Kolbens niemals eine continuirliche, sondern stets eine discontinuirliche Zustandsänderung stattfindet. Während derselben wird der Druck der eingeschlossenen Luft am bewegten Kolben der Reihe nach die Werthe $p_1, p_3, p_5 \dots$ und am ruhenden Kolben der Reihe nach die Werthe $p_0, p_2, p_4 \dots$ annehmen, wobei dann gleichzeitig auch die Dichtigkeit γ und die Temperatur T sprunghaft stets neue Werthe annehmen werden, zu deren Bezeichnung allemal die gleichen Indexziffern verwendet werden sollen — in der Weise, dass die geraden Indexnummern allemal auf den Ruhezustand und die ungeraden auf den gleichförmigen Bewegungszustand sich beziehen. Da alle diese Zustandsänderungen nach einem und demselben Gesetze erfolgen, so wird es genügen, für eine derselben — z. B. für den ersten Verdichtungsprocess — die erforderlichen Gleichungen abzuleiten, welche alsdann bei entsprechender Erhöhung der Indexnummern auch für die sämtlichen später folgenden Verdichtungsprocesse als gültig betrachtet werden dürfen.

§ 3. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen.

Zur Ableitung der betreffenden Gleichungen kann man neben dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze noch das Gesetz des Schwerpunkts und das Gesetz der Aequivalenz von Wärme und lebendiger Kraft (oder mechanischer Arbeit) benutzen. Wenn:

$$(2) \quad \epsilon_1 = \frac{v_1}{v_0} = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}$$

das Compressionsverhältniss ist, welches dem ersten Verdichtungsprocesse entspricht, so ist $\epsilon_1 v_0$ das Volumen, welches die bewegte comprimirt Luftsäule in demjenigen Zeitpunkte annimmt, wo ihr Gewicht die Grösse von 1 kg erreicht (Fig. 4_b). Die von dem Schwerpunkte des Luftkilogramms bis zu diesem Zeitpunkte zurückgelegte Weglänge ist gleich der Hälfte des Kolbenweges und hat die Grösse:

$$(3) \quad s = \frac{v_0}{2} - \frac{\epsilon_1 v_0}{2}.$$

Da das Luftkilogramm während dieser Zeit beständig unter Einwirkung der beiden entgegengesetzten äusseren Kräfte p_0 und p_1 sich befand, so ist:

$$(4) \quad \mathfrak{A} = (p_1 - p_0) s = \frac{(p_1 - p_0)(1 - \epsilon_1) v_0}{2}$$

die mechanische Arbeit, welche die äusseren Kräfte verrichtet haben würden, wenn der Schwerpunkt ihren gemeinschaftlichen Angriffspunkt bildete. Wenn mit z die der Geschwindigkeit u entsprechende Fallhöhe bezeichnet wird, so ist:

$$(5) \quad \frac{1}{g} \cdot \frac{u^2}{2} = z$$

die lebendige Kraft, welche die Masse des Luftkilogramms in jenem Zeitpunkte angenommen hat. Indem man — dem Principe der lebendigen Kraft und dem Gesetze des Schwerpunkts gemäss — die erzeugte lebendige Kraft gleich der verrichteten Arbeit setzt, erhält man die Gleichung:

$$(6) \quad \frac{(p_1 - p_0)(1 - \epsilon_1) v_0}{2} = z,$$

welcher man mit Benutzung des für v_0 aus Gleichung (1) zu entnehmenden Ausdrucks auch die folgende Form geben kann:

$$(7) \quad \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) (1 - \epsilon_1) R T_0 = 2z.$$

Wenn mit θ_1 die bei der ersten Compression entstehende Temperaturerhöhung bezeichnet wird, so hat die absolute Temperatur der comprimierten Luftsäule die Grösse:

$$(8) \quad T_1 = T_0 + \theta_1.$$

Hiernach kann, da die Drucke sich verhalten wie die Producte aus den Dichtigkeiten in die absoluten Temperaturen:

$$(9) \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{\gamma_1 T_1}{\gamma_0 T_0} = \frac{T_0 + \theta_1}{\epsilon_1 T_0}$$

gesetzt werden, und wenn man zugleich abkürzungsweise die Verhältnisszahl:

$$(10) \quad \frac{z}{R T_0} = \mu_1$$

setzt, so kann man nunmehr der Gleichung (7) auch die folgende Form geben:

$$(11) \quad 2\mu_1 \epsilon_1 = (1 - \epsilon_1) \left(1 - \epsilon_1 + \frac{\theta_1}{T_0} \right).$$

Die von aussen her auf den bewegten Kolben wirkende Kraft p_1 verrichtet während der Compression des ersten Luftkilogramms (nach Fig. 4b) die Arbeit:

$$(12) \quad p_1 v_0 (1 - \varepsilon_1) = \frac{p_1}{\varepsilon_1 \gamma_1} (1 - \varepsilon_1) = R (T_0 + \theta_1) \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right).$$

Durch diese mechanische Arbeit wird einerseits die in Gleichung (5) angegebene lebendige Kraft, andererseits die der Temperaturerhöhung θ_1 entsprechende Compressionswärme erzeugt. Wenn A das Wärmeäquivalent eines Meterkilogramms, c_v die spezifische Wärme der Luft bei constantem Volumen, c_p die spezifische Wärme bei constantem Druck und $k = c_p / c_v$ das Verhältniss dieser beiden specifischen Wärmen bedeutet, so kann nach der mechanischen Wärmetheorie:

$$(13) \quad AR = c_p - c_v = c_v (k - 1)$$

gesetzt werden, und für das mechanische Aequivalent der Compressionswärme ergibt sich hiernach der Ausdruck:

$$(14) \quad \frac{c_v \theta_1}{A} = \frac{c_v R \theta_1}{AR} = \frac{R \theta_1}{k - 1}.$$

Die Anwendung des Grundprincips der mechanischen Wärmetheorie führt also zu der Gleichung:

$$(15) \quad z + \frac{R \theta_1}{k - 1} = R (T_0 + \theta_1) \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right),$$

welcher man nach der in Gleichung (10) eingeführten Bezeichnung auch die folgende Form geben kann:

$$(16) \quad \mu_1 \varepsilon_1 = 1 - \varepsilon_1 + \frac{\theta_1}{T_0} \left[1 - \varepsilon_1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{k - 1} \right) \right],$$

und wenn man dieselbe in dieser Form von Gleichung (11) subtrahirt, so erhält man durch Auflösung der auf solche Weise gefundenen Gleichung für θ_1 den Ausdruck:

$$(17) \quad \theta_1 = (k - 1) T_0 (\mu_1 + 1 - \varepsilon_1).$$

Indem man diesen Ausdruck nunmehr in Gleichung (11) (oder auch in Gleichung 16) für θ_1 substituirt, findet man für ε_1 den Werth:

$$(18) \quad \varepsilon_1 = 1 + \frac{\mu_1}{2k} \left[k + 1 \pm \sqrt{(k + 1)^2 + \frac{8k}{\mu_1}} \right].$$

Von den beiden vor dem Wurzelzeichen stehenden Vorzeichen würde das Plus-Zeichen für ε_1 einen Werth liefern,

welcher grösser ist als Eins — entsprechend dem später noch näher zu untersuchenden Falle einer rückläufigen Bewegung des Kolbens, oder dem Falle, in welchem statt der Compression eine Expansion stattfindet. Für den hier zu untersuchenden Fall der Compression gilt das Minus-Zeichen; also ist:

$$(19) \quad \varepsilon_1 = 1 + \frac{\mu_1}{2k} \left[k + 1 - \sqrt{(k+1)^2 + \frac{8k}{\mu_1}} \right].$$

Wenn die Anfangstemperatur T_0 und die Grösse der constanten Kolbengeschwindigkeit u gegeben sind, so ist nach Gleichung (10) mit dem gegebenen Werthe von μ_1 zugleich die constante Grösse:

$$(20) \quad a_1 = \sqrt{(k+1)^2 + \frac{8k}{\mu_1}}$$

gegeben, und nach Einführung der durch diese Gleichung definirten neuen Constanten kann man den Gleichungen für μ_1 und ε_1 auch die folgenden Formen geben:

$$(21) \quad \mu_1 = \frac{8k}{a_1^2 - (k+1)^2},$$

$$(22) \quad \varepsilon_1 = 1 - \left(\frac{4}{a_1 + k + 1} \right).$$

Die hier für den ersten Verdichtungsprocess gefundenen Gleichungen können, wenn der Index um $n-1$ erhöht — also wenn n statt 1 und $n-1$ statt 0 gesetzt — wird, sofort auf den n -ten Verdichtungsprocess angewendet werden, wovon man sich durch die folgende Betrachtung überzeugen kann.

Indem man die oben für μ_1 und ε_1 gefundenen Ausdrücke in Gleichung (17) substituirt, erhält man die Gleichung:

$$(23) \quad \frac{\theta_1}{T_0} = \frac{4(k-1)(a_1 + k - 1)}{a_1^2 - (k+1)^2}.$$

Da der Endzustand der ersten den Anfangszustand der zweiten Zustandsänderung bildet, so kann zur Berechnung dieser letzteren die der Gleichung (10) analog gebildete Gleichung:

$$(24) \quad \mu_2 = \frac{z}{R T_1} = \frac{z}{R (T_0 + \theta_1)} = \frac{\mu_1}{1 + \frac{\theta_1}{T_0}}$$

benutzt werden, welcher man nach Substitution des in der vorhergehenden Gleichung gefundenen Ausdrucks mit Be-

nutzung der Gleichung (21) auch die folgende Form geben kann:

$$(25) \quad \mu_2 = \frac{8k}{[a_1 + 2(k-1)]^2 - (k+1)^2}.$$

Indem man hierin $a_1 + 2(k-1) = a_2$ setzt, erhält man alsdann die den Gleichungen (21) und (22) analog gebildeten Gleichungen:

$$(26) \quad \mu_2 = \frac{8k}{a_2^2 - (k+1)^2},$$

$$(27) \quad \varepsilon_2 = 1 - \left(\frac{4}{a_2 + k + 1} \right) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

worauf dann die zur Berechnung der dritten Zustandsänderung erforderliche Bestimmung der Werthe von θ_2 und μ_3 in derselben Weise wie oben die Berechnung der Grössen θ_1 und μ_2 ausgeführt werden kann. Wenn man die Rechnung in dieser Weise fortsetzt, so erhält man für die n -te Zustandsänderung die Gleichungen:

$$(28) \quad \mu_n = \frac{8k}{a_n^2 - (k+1)^2} = \frac{z}{R T_{n-1}},$$

$$(29) \quad \varepsilon_n = 1 - \left(\frac{4}{a_n + k + 1} \right),$$

$$(30) \quad a_n = a_1 + 2(n-1)(k-1),$$

welche in Verbindung mit den die Definitionen der Constanten enthaltenden Gleichungen (20), (10), (5) zur Berechnung des Endzustandes für den n -ten Verdichtungsprocess ausreichen, insofern die Grössen p_n , γ_n , T_n nunmehr berechnet werden können aus den Gleichungen:

$$(31) \quad \frac{p_n}{p_0} = \frac{\gamma_n T_n}{\gamma_0 T_0},$$

$$(32) \quad \frac{\gamma_n}{\gamma_0} = \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_3} \cdots \frac{1}{\varepsilon_n},$$

$$(33) \quad T_n = \frac{z}{R \mu_{n+1}}, \quad \text{oder:} \quad \frac{T_n}{T_0} = \frac{\mu_1}{\mu_{n+1}}.$$

Bei der obigen Untersuchung wurde vorausgesetzt, dass die Kolbengeschwindigkeit u und mit derselben zugleich die Constante a_1 gegeben war. Wenn statt dessen die Constante:

$$(34) \quad \sigma_1 = \frac{p_1}{p_0}$$

gegeben wäre, so würde die Constante a_1 auf folgende Weise berechnet werden können. Nach Gleichung (9) ist:

$$(35) \quad \sigma_1 \varepsilon_1 = 1 + \frac{\theta_1}{T_0}.$$

Wenn man hierin für die Grössen ε_1 und θ_1 ihre aus den Gleichungen (22) und (23) zu entnehmenden Werthe einsetzt, so erhält man die Gleichung:

$$(36) \quad \sigma_1 \left[1 - \left(\frac{4}{a_1 + k + 1} \right) \right] = 1 + \frac{4(k-1)(a_1 + k - 1)}{a_1^2 - (k+1)^2},$$

aus welcher man für die Constante a_1 den folgenden Ausdruck erhält:

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} a_1 &= 2 \left(\frac{\sigma_1 + k - 1}{\sigma_1 - 1} \right) \\ &+ \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_1 + k - 1}{\sigma_1 - 1} \right)^2 - \left[\frac{(k+1)^2 - 4(k-1)^2 - \sigma_1(k+1)(k-3)}{\sigma_1 - 1} \right]} \end{aligned} \right.$$

Wenn mit U_1 die Geschwindigkeit bezeichnet wird, mit welcher während des ersten Verdichtungsprocesses die Vorderfläche der comprimierten Luftsäule (oder die Grenzfläche zwischen bewegter und ruhender Luft) fortschreitet, und mit t die Zeit, in welcher der Verdichtungsprocess des ersten Luftkilogramms sich vollzieht, so ist nach Fig. 4_b:

$$(38) \quad ut = (1 - \varepsilon_1) v_0 \text{ und } U_1 t = v_0, \text{ also } U_1 = \frac{u}{1 - \varepsilon_1}$$

zu setzen, und wenn man die Geschwindigkeit jener (die Stossfläche bildenden) Grenzfläche stets als relative Geschwindigkeit in Bezug auf die ruhende oder bewegte Luftmasse auffasst, in welcher dieselbe fortschreitet, so erhält man auf gleiche Weise für den n -ten Verdichtungsprocess die Gleichung:

$$(39) \quad U_n = \frac{u}{1 - \varepsilon_n} = \frac{u}{4} (k + 1 + a_n),$$

welcher man nach Substitution des aus Gleichung (28) für a_n zu entnehmenden Ausdrucks auch die folgende Form geben kann:

$$(40) \quad U_n = \frac{u}{4} \left[k + 1 + \sqrt{(k+1)^2 + \frac{8kR}{z} T_{n-1}} \right].$$

Die Grösse U_n wird, wie diese Gleichung zeigt, um so kleiner, je kleiner die Grösse $u = \sqrt{2gz}$ ist, und bei abnehmendem Werthe von u nähert sich die Grösse U_n dem festen Grenzwerte:

$$(41) \quad \lim. U_n = \sqrt{kg R T_{n-1}}.$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Grösse ist der Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen in einer Luftmasse von der absoluten Temperatur T_{n-1} . Aus den obigen Gleichungen ergibt sich also der folgende Satz:

Die relative Geschwindigkeit, mit welcher die Stossfläche in der ruhenden oder bewegten Luft fortschreitet, ist stets grösser, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung in derselben sein würde — wie klein auch immer die Compressionsgeschwindigkeit sein möge; folglich kann bei gleichförmiger Compression niemals eine Wellenbewegung in der Luftmasse entstehen.

§ 3. Anwendungen auf specielle Fälle.

Dem Werthe $\mu_1 = 1/(k-1)$ entspricht nach Gl. (20) der Werth $a_1 = 3k-1$, und für diesen Fall ergeben sich aus den Gleichungen (30), (28), (29) die folgenden zusammengehörigen Werthe:

n	1	2	3	4	...	n
a_n	$3k-1$	$5k-3$	$7k-5$	$9k-7$...	$(2n+1)k-(2n-1)$
μ_n	$\frac{1}{k-1}$	$\frac{k}{(k-1)(3k-1)}$	$\frac{k}{(k-1)(6k-3)}$	$\frac{k}{(k-1)(10k-6)}$...	$\frac{2k}{n(k-1)[n(k-1)+k+1]}$
e_n	$\frac{k-1}{k}$	$\frac{3(k-1)}{3k-1}$	$\frac{2(k-1)}{2k-1}$	$\frac{5(k-1)}{5k-3}$...	$\frac{(n+1)(k-1)}{(n+1)k-(n-1)}$
T_n	$\frac{3k-1}{k}$	$\frac{6k-3}{3k-1}$	$\frac{10k-6}{6k-3}$	$\frac{15k-10}{10k-6}$...	$1 + \frac{2}{n} \left[\frac{k+n(k-1)}{k+1+n(k-1)} \right]$
T_{n-1}	$\frac{3k-1}{k}$	$\frac{6k-3}{3k-1}$	$\frac{10k-6}{6k-3}$	$\frac{15k-10}{10k-6}$...	$1 + \frac{2}{n} \left[\frac{k+n(k-1)}{k+1+n(k-1)} \right]$

Für die letzteren drei Grössen erhält man nach Substitution des Werthes:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{0,2375}{0,1685}$$

die in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellten numerischen Werthe:

n	1	2	3	4	...	100
μ_n	2,442	1,066	0,6308	0,4252	...	0,00159
e_n	0,2905	0,3805	0,4502	0,5058	...	0,954
T_n/T_{n-1}	2,2905	1,6908	1,4834	1,3764	...	1,0195

Aus den Gleichungen (31), (32), (33) erhält man hiernach z. B. für die Endzustände der ersten vier Verdichtungsprozesse die Werthe:

$n =$	1	2	3	4
$p_n/p_0 =$	7,885	35,022	115,4	314,07
$\gamma_n/\gamma_0 =$	3,442	9,044	20,09	39,73
$T_n/T_0 =$	2,2905	3,872	5,744	7,905.

Die Wärmemenge, welche einem Luftkilogramm zugeführt werden muss, um die Druckvergrößerung dp und gleichzeitig die Volumenvergrößerung dv hervorzubringen, hat die Grösse:

$$(42) \quad dQ = c_v \left(\frac{dT}{dp} \right) dp + c_p \left(\frac{dT}{dv} \right) dv.$$

Wenn man hierin für die beiden partiellen Differentialquotienten ihre aus der Gleichung $pv = RT$ zu entnehmenden Werthe einsetzt, so erhält man für die entsprechende Entropiezunahme die Gleichung:

$$(43) \quad dE = \frac{dQ}{T} = \frac{c_v v dp + c_p p dv}{RT},$$

welcher man nach Substitution des Werthes pv statt RT auch die folgende Form geben kann:

$$(44) \quad dE = c_v \left(\frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} \right), \quad \text{oder:}$$

$$(45) \quad dE = d[c_v \log(pv^k)].$$

Durch Integration dieser letzteren Gleichung erhält man für die bis zum Ende des n ten Verdichtungsprocesses stattfindende Entropiezunahme den Ausdruck:

$$(46) \quad E_n - E_0 = c_v \log \left(\frac{p_n}{p_0} \cdot \frac{v_n^k}{v_0^k} \right),$$

welchen man mit Benutzung des Poisson'schen Gesetzes auch die folgende Form geben kann:

$$(47) \quad E_n - E_0 = c_v \log \left[\frac{T_n}{T_0} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_n} \right)^{k-1} \right].$$

Für den oben als Beispiel gewählten Fall ergeben sich aus dieser Gleichung die folgenden Zahlenwerthe:

$n =$	1	2	3	4
$E_n - E_0 =$	0,0544	0,0762	0,0876	0,0943.

Die adiabatische oder isentropische Zustandsänderung würde nach dem Poisson'schen Gesetze der Bedingungsgleichung:

$$(48) \quad p v^k = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \frac{T_n}{T_0} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_n} \right)^{k-1} = \text{Const.}$$

entsprechen. Bei der hier untersuchten gleichförmigen Compression dagegen erleidet die Luftmasse eine Reihe von Zustandsänderungen, bei welchen ihr Entropiewerth jedesmal sprungweise zunimmt, und die demselben entsprechende isentropische Curve immer weiter von der dem ursprünglichen Werthe entsprechenden sich entfernt.

Eine in aller Strenge adiabatische oder isentropische Zustandsänderung der Luftsäule würde nur dann stattfinden, wenn entweder die Geschwindigkeit des Kolbens unendlich klein wäre, oder wenn die Luftsäule durch bewegliche unendlich dünne Platten in unendlich dünne Schichten getheilt wäre, und wenn diese Platten dem ruhenden Ende der Säule mit constanten — ihren Abständen von demselben proportionalen — Geschwindigkeiten sich näherten. Die isentropische Zustandsänderung repräsentirt demnach einen idealen Fall, welcher zwar annäherungsweise, nie aber mit mathematischer Strenge verwirklicht werden kann. Mit demselben Rechte, wie z. B. behauptet werden darf, dass es in der Wirklichkeit keinen vollkommen elastischen Stoss oder kein mathematisches Pendel gibt, darf daher auch behauptet werden: dass in Wirklichkeit keine isentropische Zustandsänderungen vorkommen.

Der Werth $n = 2$ entspricht — wie überhaupt jeder gerade Zahlenwerth der Indexnummer n — einem Ruhezustande der Luftsäule, und zwar, wie oben gezeigt, einem Zustande, bei welchem die Entropie der Luftmasse einen grösseren Werth hat, als beim Anfangszustande. Denkt man sich auf den zweiten Verdichtungsprocess eine adiabatische Wiederausdehnung folgend und diese Ausdehnung so weit fortgesetzt, bis der Druck wieder auf die Anfangsgrösse p_0 (unter welcher man sich beispielsweise die Grösse des atmosphärischen Druckes denken kann) abgenommen hat, so ergibt sich: dass durch jene vorher eingetretene Entropiezunahme im Sinne der Mechanik stets ein Arbeitsverlust bedingt wird, insofern die von dem Luftdrucke bei der Wiederausdehnung verrichtete Arbeit kleiner ist, als die vorher bei der Compression auf die Luftmasse übertragene Arbeit.

Da während der gleichförmigen Compression bis zum Ende des zweiten Verdichtungsprocesses die von aussen her auf den bewegten Kolben wirkende Kraft ihre Grösse $p_1 = \sigma_1 p_0$ unverändert beibehielt, so hat die während dieser Compression auf die Luftmasse (pro Kilogramm) übertragene Arbeit die Grösse:

$$(49) \quad \mathfrak{A} = \sigma_1 p_0 v_0 (1 - \epsilon_1 \epsilon_2) = \sigma_1 R T_0 (1 - \epsilon_1 \epsilon_2).$$

Wenn mit T_0' die Grösse bezeichnet wird, bis zu welcher die absolute Temperatur bei der nachher folgenden adiabatischen Ausdehnung abnimmt, so ist:

$$(50) \quad \mathfrak{A}' = \frac{c_v (T_2 - T_0')}{A}$$

die Arbeit, welche der Luftdruck bei dieser Expansion (pro Massenkilogramm) verrichtet. Nach den Gleichungen (13) und (48) kann man statt dessen auch setzen:

$$(51) \quad \mathfrak{A}' = \frac{R T_2}{(k-1)} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Mit Benutzung der obigen Tabellen erhält man aus den Gleichungen (49) und (51) die folgenden Werthe:

$$(52) \quad \mathfrak{A} = 7,013 R T_0, \quad \mathfrak{A}' = 6,09 R T_0, \quad \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} = 0,13156.$$

Von der auf die Luftmasse übertragenen Arbeit sind also etwa 13 Proc. im Sinne der Mechanik als verloren zu betrachten, insofern das Aequivalent dieser Arbeit, nämlich die zu gewinnende Wärmequantität:

$$(53) \quad \mathfrak{A} = c_v (T_0' - T_0)$$

vom Standpunkte der Mechanik aus nicht als Ersatz zu betrachten ist — ebensowenig wie z. B. bei dem unelastischen Stosse die erzeugte Wärme als Ersatz für die verlorene lebendige Kraft in Rechnung gebracht zu werden pflegt.

Ein noch grösserer Werth würde für diesen Arbeitsverlust sich ergeben, wenn die gleichförmige Compression schon in einem früheren Zeitpunkte unterbrochen worden wäre — zu derjenigen Zeit nämlich, als die der Luftmasse ertheilte lebendige Kraft gerade ausgereicht haben würde, um bei nachheriger Umwandlung in Wärme einen Druck

hervorzubringen, welcher dem äusseren Drucke $p_1 = \sigma_1 p_0$ das Gleichgewicht hält. Wenn mit ε das in jenem Zeitpunkte eingetretene Compressionsverhältniss bezeichnet wird, so ist:

$$(54) \quad \mathfrak{A} = \sigma_1 p_0 v_0 (1 - \varepsilon) = \sigma_1 R T_0 (1 - \varepsilon)$$

die mechanische Arbeit, welche bis dahin durch den äusseren Druck auf die Luftmasse (pro Kilogramm) übertragen wurde, und wenn mit T die Grösse bezeichnet wird, bis zu welcher die absolute Temperatur infolge der Umwandlung dieser Arbeit in Wärme zunimmt, so ist:

$$(55) \quad T = T_0 + \frac{A \sigma_1 R T_0 (1 - \varepsilon)}{c_v} = T_0 [1 + (k - 1) \sigma_1 (1 - \varepsilon)].$$

Da dieser Temperaturwerth dem Drucke $\sigma_1 p_0$ und dem Volumen εv_0 entspricht, so ist nach der Mariotte-Gay-Lussac'schen Gleichung:

$$(56) \quad T = \frac{\sigma_1 p_0 \varepsilon v_0}{R} = \sigma_1 \varepsilon T_0.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhält man eine Gleichung, welche für ε aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$(57) \quad \varepsilon = \frac{1 + \sigma_1 (k - 1)}{\sigma_1 k}.$$

Nach Gl. (54) hat also die vom äusseren Drucke auf die Luftmasse übertragene Arbeit die Grösse:

$$(58) \quad \mathfrak{A} = R T_0 \left(\frac{\sigma_1 - 1}{k} \right) = 4,885 R T_0.$$

Wenn mit T_0'' die Grösse bezeichnet wird, bis zu welcher bei der nachher folgenden adiabatischen Ausdehnung die absolute Temperatur abnimmt, während der Druck von p_1 bis auf p_0 abnimmt, so ist:

$$(59) \quad \mathfrak{A}' = \frac{c_v (T - T_0'')}{A}$$

die mechanische Arbeit, welche hierbei vom Luftdrucke auf den Kolben übertragen wird. Nach Gl. (48) und Gl. (13) kann man statt dessen auch setzen:

$$(60) \quad \mathfrak{A}' = \frac{R T}{(k - 1)} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Mit Benutzung der oben für T und ε gefundenen Ausdrücke erhält man hiernach die Gleichung:

$$(61) \quad \mathcal{Q}' = R T_0 \left[\frac{1 + \sigma_1 (k-1)}{k(k-1)} \right] \left[1 - \left(\frac{1}{\sigma_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = 3.305 R T_0.$$

Das Verhältniss der verlorenen Arbeit zu der Compressionsarbeit hat also in diesem Falle die Grösse:

$$(62) \quad \frac{\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'}{\mathcal{Q}} = 0,3233.$$

Der Arbeitsverlust beträgt also mehr als 32 Proc., und nach Gl. (47) hat die Entropie zugenommen um die Grösse:

$$(63) \quad E - E_0 = 0,11757.$$

Dem Werthe $\sigma_1 = \infty$ entspricht nach Gl. (37) der Werth $a_1 = k+1$, und nach Gl. (21) der Werth $\mu_1 = \infty$. Für diesen Fall erhält man auf dieselbe Weise wie oben die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

n	=	1	2	3	4	. . .	n
σ_n	=	$k+1$	$3k-1$	$5k-3$	$7k-5$. . .	$(2n-1)k-(2n-3)$
μ_n	=	∞	$\frac{1}{k-1}$	$\frac{k}{(k-1)(3k-1)}$	$\frac{k}{(k-1)(6k-3)}$. . .	$\frac{2k}{(n-1)(k-1)[2+n(k-1)]}$
ε_n	=	$\frac{k-1}{k+1}$	$\frac{k-1}{k}$	$\frac{3(k-1)}{3k-1}$	$\frac{2(k-1)}{2k-1}$. . .	$\frac{n(k-1)}{2+n(k-1)}$
T_n	=	∞	$\frac{3k-1}{k}$	$\frac{6k-3}{3k-1}$	$\frac{10k-6}{6k-3}$. . .	$1 + \left(\frac{2}{n-1} \right) \left[\frac{n(k-1)+1}{n(k-1)+2} \right]$
T_{n-1}	=						

Eine Vergleichung der für den vorigen Fall berechneten Tabelle mit dieser letzteren zeigt, dass eine vollkommene Uebereinstimmung zwischen beiden stattfinden würde, wenn der Index n entweder bei der ersteren um Eins erniedrigt oder bei der letzteren um Eins erhöht würde. Bei endlicher Grösse der Kolbengeschwindigkeit u würde nach Gl. (10) dem Werthe $\mu_1 = \infty$ der Werth $T_0 = 0$ entsprechen, und für diesen Fall würden am Ende des ersten Verdichtungsprocesses sowohl der Druck als auch die Temperatur endliche Werthe annehmen. Wenn also der diesen Werthen entsprechende Zustand als Anfangszustand gewählt würde für die dem vorigen Falle entsprechende Reihe von Zustandsänderungen, so würde hinsichtlich aller später folgenden Zustände eine vollkommene Uebereinstimmung zwischen diesen beiden Fällen stattfinden — abgesehen von dem Unterschiede, dass einem und demselben Zustande in dem einen Falle der Ruhezustand

stand, in dem anderen der gleichförmige Bewegungszustand entspricht.

Indem man die Rechnung auf dieselbe Weise wie oben fortsetzt, findet man für die ersten sechs Zustandsänderungen die folgenden Zahlenwerthe:

n	1	2	3	4	5	6
μ_n	∞	2,442	1,066	0,6308	0,4252	0,3089
ε_n	0,17	0,2905	0,3805	0,4502	0,5058	0,5513
T_n / T_{n-1}	∞	2,2905	1,6903	1,4834	1,3764	1,3125
γ_n / γ_0	5,884	20,25	53,21	118,2	233,6	423,65
T_n / z	0,014	0,032	0,0542	0,0804	0,1106	0,1452
$p_n / \gamma_n z$	2,41	19,0	84,3	277,9	756,2	1800.

Wenn die Anfangstemperatur T_0 von Null verschieden war, so entspricht (nach Gl. 10) dem hier angenommenen Falle $\mu_1 = \infty$ eine unendlich grosse Kolbengeschwindigkeit, folglich auch ein unendlich grosser Werth der auf den Kolben wirkenden Kraft p_1 , welche nach der oben mit Bezug auf Fig. 4 gegebenen Erklärung während der ersten beiden Verdichtungsprocesse constant bleibt. Da im Augenblicke der Beendigung des zweiten Verdichtungsprocesses der innere Druck der comprimierten (und gleichzeitig zur Ruhe gelangten) Luftmasse grösser ist als der äussere Druck p_1 , so würde bei fernerm Constantbleiben des letzteren eine Umkehr des Kolbens eintreten, und nach Gl. (57) erhält man für dasjenige Compressionsverhältniss, bei welchem nachher Gleichgewicht zwischen innerem und äusseren Drucke eintreten würde, mit Benutzung des abgerundeten Zahlenwerthes $k=1,4$, indem man $\sigma_1 = \infty$ setzt, den Werth:

$$(64) \quad \lim. \varepsilon = \frac{k-1}{k} = \frac{2}{7}.$$

Nach der dem Buchstaben ε in Gl. (57) beigelegten Bedeutung ergibt sich hieraus der folgende Satz:

Durch eine constante Kraft kann eine Luftmasse auf die Dauer niemals weiter comprimirt werden, als bis auf zwei Siebentel des ursprünglichen Volumens.

Mit Benutzung der aus obiger Tabelle zu entnehmenden abgerundeten Zahlenwerthe $\gamma_1 = 6\gamma_0$ und $\gamma_2 = 20\gamma_0$ kann man für diesen Fall ferner die folgenden beiden Sätze ableiten:

Wenn in einem mit Luft gefüllten offenen Rohre ein Kolben mit unendlich grosser constanter Geschwindigkeit sich bewegt, so wird die vor dem Kolben befindliche Luft stets auf das Sechsfache ihrer ursprünglichen Dichtigkeit comprimirt.

Wenn auf den Kolben einer Compressionspumpe eine constante unendlich grosse Kraft wirkt, so erreicht die Dichtigkeit der comprimirt Luft im Augenblicke der Umkehr des Kolbens, stets das Zwanzigfache ihrer ursprünglichen Grösse.

Dieselben Vorgänge würden bei endlicher Grösse der Kolbengeschwindigkeit, resp. der auf den Kolben wirkenden Kraft stattfinden, wenn die Anfangstemperatur $T_0 = 0$ war.

§ 4. Anwendungen auf tropfbar flüssige und feste Körper.

Die Gl. (6) würde in Bezug auf den in Fig. 4 dargestellten Fall auch dann noch ihre Gültigkeit behalten, wenn eine Wassersäule statt der Luftsäule zwischen den beiden Kolben sich befände. Für diesen Fall würde die Gl. (15) zu ersetzen sein durch die Gleichung:

$$(65) \quad \frac{p_1 - p_0}{E} = 1 - \epsilon_1,$$

in welcher E den Elasticitätscoefficienten bedeutet oder den reciproken Werth der durch eine Druckvergrösserung von 1 kg pro Flächeneinheit hervorgebrachten Verkürzung der Wassersäule pro Längeneinheit. Indem man wieder $\gamma_0 v_0 = 1$ setzt, erhält man aus den beiden Gleichungen (6) und (65) die Werthe:

$$(66) \quad p_1 - p_0 = \sqrt{2 E \gamma_0 z} = u \sqrt{\frac{E \gamma_0}{g}},$$

$$(67) \quad 1 - \epsilon_1 = \sqrt{\frac{2 \gamma_0 z}{E}} = u \sqrt{\frac{\gamma_0}{E g}}.$$

Nach Gl. (38) hat die Geschwindigkeit, mit welcher die Grenzfläche zwischen ruhender und bewegter Masse fortschreitet, die Grösse:

$$(68) \quad U_1 = \frac{u}{1 - \epsilon_1} = \sqrt{\frac{E g}{\gamma_0}}.$$

Hierin kann annäherungsweise $E = 200\,000\,000$ und $\gamma_0 = 1000$ kg gesetzt werden; man erhält dann aus der letzteren Gleichung den abgerundeten Werth $U_1 = 1400$ m, und wenn der Anfangsdruck $p_0 = 0$ war, so entspricht nach Gl. (66)

der Kolbengeschwindigkeit $u = 1$ m der Druck $p_1 = 140000$ kg, also ein Druck von 14 Atmosphären. Da für kleine Druckänderungen die Grössen γ_0 und E annäherungsweise als constante Grössen behandelt werden dürfen, so würde man annäherungsweise die obigen Gleichungen auch auf die bei Fortsetzung der gleichförmigen Kolbenbewegung stattfindenden nächstfolgenden Zustandsänderungen anwenden dürfen, indem man den Endzustand der vorigen als Anfangszustand für die neue Zustandsänderung annimmt.

Wenn z. B. die Länge der Wassersäule anfangs gleich 70 000 m war (Entfernung der Stadt Aachen von der Stadt Köln), so würde in dem Augenblicke, wo der Kolben anfängt, mit der Geschwindigkeit von 1 m pro Secunde sich zu bewegen, zunächst in der vor dem Kolben befindlichen Wassermasse ein Druck von 14 Atmosphären entstehen. Dieser Druck würde nach Ablauf von 50 Secunden das jenseitige Ende erreichen und sich dort verdoppeln. Der auf 28 Atmosphären gestiegene Druck würde nach Ablauf von nahezu abermals 50 Secunden, also in dem Augenblicke, wo der Kolben eine Weglänge von etwa 100 m zurückgelegt hatte, den letzteren erreichen und hier sprungweise bis auf 42 Atmosphären zunehmen etc.

Bei entsprechender Aenderung der numerischen Constanten würde man in derselben Weise auch die in einem festen elastischen Körper unter gleichen Umständen eintretenden Zustandsänderungen berechnen können. So z. B. würde man für Schmiedeeisen mit Benutzung der abgerundeten Zahlenwerthe $\gamma_0 = 8000$ kg und $E = 20\,000$ Mill. unter gleichen Voraussetzungen die Werthe $U_1 = 5000$ m und $p_1 = 4$ Mill. kg erhalten. Die Zeit, in welcher die Druckzunahme die Länge der Säule durchläuft, würde also in diesem Falle etwa 14 Secunden betragen, und bei jedem Dichtigkeitswechsel würde die Druckspannung pro Quadratmillimeter des Querschnittes um 4 kg zunehmen.

Die obigen Gleichungen würden für feste elastische Körper auch dann noch ihre Gültigkeit behalten, wenn die Spannungen p_0 und p_1 Zugspannungen wären statt Druckspannungen. Wenn also z. B. bei einem schmiedeeisernen Drahte von 70 000 m Länge das eine Ende an einem festen

Punkte, das andere Ende an einer Locomotive befestigt wäre, welche mit einer Geschwindigkeit von 1 m pro Secunde sich bewegt, so würde der Draht stets aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine im Ruhezustande sich befindet, während der andere mit der constanten Geschwindigkeit von 1 m pro Secunde fortschreitet. Die Grenze zwischen dem ruhenden und dem bewegten Theile läuft dabei mit einer Geschwindigkeit von 5000 m in je 14 Secunden von einem Ende zum anderen, und jedesmal, wenn dieselbe einen der beiden Endpunkte erreicht, wächst die Spannung sprunghaft um 4 kg pro Quadratmillimeter. In dem Augenblicke, wo jene Grenzfläche zum ersten mal die Länge des Drahtes durchlaufen hat, wächst diese Spannung von 4 bis 8 kg, während die auf das Vorderende übertragene Zugkraft ihre ursprüngliche Grösse von 4 kg pro Quadratmillimeter noch beibehalten hat. Hierdurch erklärt sich die bekannte Erscheinung, dass es leichter ist, einen langen Faden zu zerreißen, als einen kurzen. Bei dem ersteren reicht eine Zugkraft schon aus, welche halb so gross ist, als die Zugfestigkeit des Fadens, während bei dem kurzen Faden die zerreisende Kraft nahezu gleich der Zugfestigkeit selbst ist.

§ 5. Zustandsänderung der Luft bei gleichförmiger Expansion.

Wenn man in Gleichung (18) das Plus-Zeichen statt des Minus-Zeichens vor dem Wurzelausdrucke gelten lässt, so erhält man die Gleichung:

$$(69) \quad \varepsilon_1 = 1 + \frac{\mu_1}{2k} \left[k + 1 + \sqrt{(k+1)^2 + \frac{8k}{\mu_1}} \right].$$

Diese letztere Gleichung liefert für ε_1 einen Werth, welcher grösser ist als Eins und gilt — wie in § 2 bereits erwähnt wurde — für den Fall der rückläufigen Bewegung des Kolbens, also für den Fall, in welchem $p_1 < p_0$ ist, und infolge dessen eine Expansion statt der Compression stattfindet. Statt der Gleichung (22) erhält man für diesen Fall die Gleichung:

$$(70) \quad \varepsilon_1 = 1 + \frac{4}{\alpha_1 - (k+1)},$$

und wenn man mit diesem abgeänderten Werthe von ε_1 die Rechnung in derselben Weise wie oben fortsetzt, so erhält

man die den Gleichungen (28), (29), (30) analog gebildeten allgemeinen Gleichungen:

$$(71) \quad \mu_n = \frac{8k}{a_n^2 - (k+1)^2} = \frac{z}{R T_{n-1}},$$

$$(72) \quad \varepsilon_n = 1 + \frac{4}{a_n - (k+1)},$$

$$(73) \quad a_n = a_1 - 2(n-1)(k-1).$$

Für die einem gegebenen Werthe der Verhältnisszahl $\sigma = p_1/p_0$ entsprechende Grösse von a_1 erhält man ferner statt der Gleichung (37) die folgende Gleichung:

$$(74) \quad a_1 = 2 \left(\frac{\sigma_1 + k - 1}{1 - \sigma_1} \right) + \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_1 + k - 1}{1 - \sigma_1} \right)^2 + \frac{(k+1)^2 - 4(k-1)^2 - \sigma_1(k+1)(k-3)}{1 - \sigma_1}}.$$

Der Werth $\sigma_1 = 0$ entspricht dem Falle, in welchem der äussere Druck plötzlich bis auf die Grösse Null abnimmt. Für diesen Fall wird nach der letzteren Gleichung:

$$(75) \quad a_1 = 3k - 1,$$

und nach Gleichung (70) entspricht diesem Werthe das Ausdehnungsverhältniss:

$$(76) \quad \varepsilon_1 = \frac{k+1}{k-1}.$$

Mit Benutzung des abgerundeten Zahlenwerthes $k = 1,4$ erhält man hieraus den folgenden Satz:

Bei plötzlichem Verschwinden des äusseren Drucks dehnt sich die Luftsäule stets auf das Sechsfache ihres Volumens aus — wie gross auch immer der Druck und die Temperatur derselben vorher waren.

Mit Benutzung des in Gleichung (75) für a_1 gefundenen Ausdrucks erhält man ferner aus den Gleichungen (71) und (73) für diesen Fall die Werthe:

$$(77) \quad \mu_1 = \frac{1}{k-1} = \frac{z}{R T_0},$$

$$(78) \quad \mu_2 = \infty = \frac{z}{R T_1}.$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass $T_1 = 0$ wird, und die vorletzte Gleichung, nach welcher die Grösse z das mechanische Aequivalent der ursprünglich vorhandenen inneren Wärme darstellt, zeigt, dass die letztere ganz in lebendige

Kraft umgewandelt wird — entsprechend (nach Gleichung 5) der Geschwindigkeit:

$$(79) \quad u = \sqrt{\frac{2gRT_0}{k-1}}.$$

In Bezug auf den in Fig. 5_a und 5_b dargestellten Vorgang ergibt sich hieraus der folgende Satz:

Bei plötzlichem Verschwinden des Kolbendrucks nimmt die zwischen der Bodenwand des cylindrischen Rohres und dem Kolben befindliche Luftsäule bei sechsfacher Volumenvergrößerung eine fortschreitende Bewegung, und zwar die ihrer inneren Wärme entsprechende lebendige Kraft an, wobei zwischen der Luftsäule und der Bodenwand ein luftleerer Raum sich bildet.

Da $T_1 = 0$ ist, so wird nach dem am Schlusse des § 3 gefundenen Satze bei dem nachherigen Stosse der Luftsäule gegen die am jenseitigen Ende befindliche Bodenwand wieder eine Versechsfachung der Dichtigkeit eintreten, das Volumen also wieder die ursprüngliche Grösse v_0 annehmen (Fig. 5_c). Hierauf folgt dann bei sechsfacher Wiederausdehnung die in Fig. 5_d dargestellte rückläufige Bewegung, und in dieser Weise würde die Luftsäule fortfahren, zwischen den beiden Bodenwänden hin und her zu schwingen, wenn die in § 1 gemachten Voraussetzungen in aller Strenge erfüllt wären. Für die Geschwindigkeit dieser Bewegung würde man aus Gleichung (79), indem man beispielsweise $T_0 = 273^\circ$ setzt, den Werth $u = 618$ m erhalten.

Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, dass bei plötzlichem Verschwinden der an den beiden Endflächen wirkenden Drucke die beiden Hälften der in Fig. 6_a dargestellten Luftsäule voneinander sich trennen und in derselben Weise wie beim vorigen Falle hin und her schwingen würden, wobei jede von den beiden Hälften abwechselnd gegen die Bodenwand und gegen die andere Hälfte stösst.

Denkt man sich eine unendlich grosse Anzahl von Röhren in der Weise zusammengestellt, dass die Axen derselben strahlenartig von einem festen Punkte ausgehen, so ergibt sich aus dem Vorigen, dass die in diesen Röhren befindlichen Luftsäulen bei sechsfacher Volumenvergrößerung nach allen Richtungen hin entweichen würden, wenn die an

den äusseren Endflächen wirkenden Drucke plötzlich aufhörten zu wirken. In Bezug auf eine kugelförmige Luftmasse ergibt sich hieraus der folgende Satz:

Im leeren Raume würde eine kugelförmige Luftmasse, vom äusseren Drucke plötzlich befreit, bei sechsfacher Volumenvergrösserung in eine Hohlkugel von wachsendem Halbmesser übergehen, wobei im Inneren ein luftleerer Raum sich bildet.

Einem Werthe $\sigma_1 > 0$ entspricht nach Gleichung (74) ein Werth $a_1 > 3k - 1$, und da von einem negativen Werthe der Verhältnisszahl σ_1 nicht die Rede sein kann, so ist der dem Werthe $\sigma_1 = 0$ entsprechende Werth $a_1 = 3k - 1$ der kleinste Werth, den die Grösse a_1 überhaupt annehmen kann, ohne dass die Berührung zwischen dem Kolben und dem Vorderende der Luftsäule aufhört. Hieraus folgt, dass die in den Gleichungen (77) und (79) gefundenen Ausdrücke die grössten Werthe darstellen, welche die Grössen μ_1 und u überhaupt annehmen können — so weit die Grösse u gedeutet wird als diejenige Geschwindigkeit, welche das Vorderende der Luftsäule annimmt.

Dem Werthe $a_1 = 5k - 3$ entsprechen nach Gleichung (73) die Werthe $a_2 = 3k - 1$ und $a_3 = k + 1$. Für diesen Fall wird also nach Gleichung (71):

$$(80) \quad \mu_1 = \frac{k}{(k-1)(3k-1)} = \frac{z}{RT_0},$$

$$(81) \quad \mu_2 = \frac{1}{k-1} = \frac{z}{RT_1},$$

$$(82) \quad \mu_3 = \infty = \frac{z}{RT_2}.$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass $T_2 = 0$ wird, und da am Ende der zweiten Zustandsänderung die ganze Luftsäule im Ruhezustande sich befindet, so wird dieser Ruhezustand fort dauern, während der Kolben seine nach aussen gerichtete Bewegung fortsetzt. Aus Gleichung (72) erhält man ferner für diesen Fall die Werthe:

$$(83) \quad \varepsilon_1 = \frac{k}{k-1} = \frac{\gamma_0}{\gamma_1},$$

$$(84) \quad \varepsilon_1 = \frac{k+1}{k-1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

$$(85) \quad \frac{\gamma_0}{\gamma_2} = \frac{k(k+1)}{(k-1)^2} = 20,25.$$

Mit Benutzung des aus letzterer Gleichung zu entnehmenden abgerundeten Zahlenwerthes $v_2 = 20 \cdot v_0$ erhält man hiernach in Bezug auf den in Fig. 7 dargestellten Vorgang den folgenden Satz:

Wenn die Kolbengeschwindigkeit einen gewissen Grenzwert überschreitet, so dehnt sich die Luftsäule zunächst auf das Zwanzigfache ihres ursprünglichen Volumens aus und hört bei diesem Volumen auf, dem Kolben zu folgen, wobei zwischen der nunmehr zur Ruhe gelangten Luftsäule und dem Kolben ein luftleerer Raum sich bildet.

Für diesen Grenzwert der Kolbengeschwindigkeit erhält man aus Gleichung (80), indem man beispielsweise wieder $T_0 = 273^\circ$ setzt, den Werth $u = 408,7$ m.

Wenn man $a_1 = 11k - 9$ setzt, so ergeben sich aus den Gleichungen (71), (72), (73) die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Werthe:

$n =$	1	2	3	4
$a_n =$	$11k - 9$	$9k - 7$	$7k - 5$	$5k - 3$
$\mu_n =$	$\frac{k}{(15k - 10)(k - 1)}$	$\frac{k}{(10k - 6)(k - 1)}$	$\frac{k}{(6k - 3)(k - 1)}$	$\frac{k}{(3k - 1)(k - 1)}$
$\epsilon_n =$	$\frac{5k - 3}{5(k - 1)}$	$\frac{2k - 1}{2(k - 1)}$	$\frac{3k - 1}{3(k - 1)}$	$\frac{k}{k - 1}$
T_n	$10k - 6$	$6k - 3$	$3k - 1$	k
T_{n-1}	$15k - 10$	$10k - 6$	$6k - 3$	$3k - 1$

Eine Vergleichung dieser Tabelle mit der ersten Tabelle des § 3 zeigt, dass die Luftsäule dieselben vier Zustandsänderungen, welche während der in § 3 berechneten gleichförmigen Compression stattfanden, bei gleichförmiger Expansion rückwärts durchlaufen würde, wenn der Zustand, in welchem die Luftsäule am Ende des vierten Verdichtungsprocesses sich befand, den Anfangszustand für den ersten der vier aufeinander folgenden Ausdehnungsprocesses bildete. Am Ende des vierten Ausdehnungsprocesses befindet sich also die Luftmasse wieder in demselben Zustande, wie zu Anfang des ersten der vier aufeinander folgenden Verdichtungsprocesses. Da ferner — wie die vierte Tabelle des § 3 zeigt — mit jedem der vier Verdichtungsprocesses eine Zunahme der Entropie verbunden war, so ergibt sich hieraus zugleich der folgende Satz:

Bei gleichförmiger Expansion durchläuft die Luftmasse eine Reihe von Zustandsänderungen, von denen jede einzelne mit einer Abnahme der Entropie verbunden ist.

Bei gleichförmiger Compression musste die auf den bewegten Kolben wirkende Kraft während der ersten beiden Verdichtungsprocesse den constanten Werth p_1 beibehalten und dann sprungweise von p_1 bis auf p_3 zunehmen, wenn der Kolben seine gleichförmige Bewegung fortsetzen sollte. Wenn statt dessen jene Kraft ihren constanten Werth p_1 auch nach Beendigung des zweiten Verdichtungsprocesses noch beibehält, so findet eine Umkehr des Kolbens statt, weil der innere Druck p_2 grösser als p_1 ist. Bei dieser Rückkehr des Kolbens wird die Luftmasse genau dieselben Zustandsänderungen, welche während der ersten beiden Verdichtungsprocesse stattfanden, wieder rückwärts durchlaufen, und am Ende des Rückganges befindet sich die Luftmasse wieder in demselben Zustande, wie beim Beginn des ersten Verdichtungsprocesses, worauf dann bei fernem Constantbleiben der Kraft p_1 derselbe Vorgang sich wiederholen wird in der Weise, dass der Kolben Schwingungen ausführt zwischen seiner Anfangslage und einer anderen Lage, welche von der Grösse der Kraft p_1 abhängt. Da für $p_1 = \infty$ in § 3 der (abgerundete) Werth $\gamma_2 = 20 \cdot \gamma_0$ (genauer $20,25 \cdot \gamma_0$) gefunden wurde, so ergibt sich hieraus der folgende Satz:

Wenn auf den Kolben einer Compressionspumpe eine constante unendlich grosse Druckkraft wirkt, so wird derselbe mit unendlich grosser Geschwindigkeit hin und her schwingen in solcher Weise, dass die Luftsäule bei jedem Hingange des Kolbens auf den zwanzigsten Theil ihrer ursprünglichen Länge verkürzt wird und bei jedem Rückgange ihre ursprüngliche Länge wieder annimmt.

Für die Geschwindigkeit U_1 , mit welcher die Grenzfläche zwischen ruhender und bewegter Luft fortschreitet, erhält man aus Gleichung (38), indem man $-u$ statt $+u$ setzt und nachher für ε_1 den aus Gleichung (70) zu entnehmenden Werth substituirt, die Gleichung:

$$(86) \quad U_1 = \frac{u}{\varepsilon_1 - 1} = \frac{u}{4} [a_1 - (k + 1)].$$

Da $a_1 = 3k - 1$ der kleinste Werth ist, den die Grösse

a_1 annehmen kann, wenn die Grösse u gedeutet wird als diejenige Geschwindigkeit, mit welcher das Vorderende der Luftsäule sich bewegt, so ist:

$$(87) \quad \left(\frac{U_1}{u}\right)_{\min} = \frac{k-1}{2}$$

der kleinste Werth, den die Verhältnisszahl U_1/u annehmen kann. Der Anfangstemperatur $T_0 = 273^\circ$ entspricht nach Gleichung (79) bei plötzlichem Verschwinden des äusseren Drucks der Werth $u = 618$ m. Für diesen Fall wird also $U_1 = 126,5$ m. Da die (der Grösse $\sqrt{T_0}$ ebenfalls proportionale) Schallgeschwindigkeit bei obiger Temperatur etwa 332 m beträgt, so ergibt sich hieraus der folgende Satz:

Bei plötzlichem Aufhören des äusseren Drucks pflanzt sich die Druckabnahme längs der Luftsäule mit einer Geschwindigkeit fort, welche nur etwa 38 Procent von der Schallgeschwindigkeit beträgt.

Der Gleichung (86) kann man mit Benutzung der Gleichungen (20) und (10) auch die folgende Form geben:

$$(88) \quad U_1 = \frac{u}{4} \left[\sqrt{(k+1)^2 + \frac{8kR}{Z} T_0} - (k+1) \right].$$

Diese Grösse nähert sich bei abnehmendem Werth der Grösse $u = \sqrt{2gz}$ dem festen Grenzwerte:

$$(89) \quad \lim. U_1 = \sqrt{kR T_0},$$

welcher zugleich die Grösse der Schallgeschwindigkeit bei der Temperatur T_0 darstellt. Da dem verschwindend kleinen Werthe von u eine verschwindend kleine Druckabnahme entspricht, so ergibt sich aus der letzteren Gleichung der folgende Satz:

Die Geschwindigkeit, mit welcher das gänzliche Verschwinden des Drucks sich fortpflanzt, beträgt nur etwa 38 Proc. von derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher eine unendlich kleine Druckabnahme sich fortpflanzt.

IV. Ueber die zum Funkenübergang in Luft, Wasserstoff und Kohlensture bei verschiedenen Drucken erforderliche Potentialdifferenz; von Friedrich Paschen aus Schwerin i./M.

(Aus dem physikal. Institut der Univ. Strassburg. Dissertation, bearbeitet vom Herrn Verfasser.)

(Hierzu Taf. I Fig. 1—3.)

Die Untersuchungen über diesen Gegenstand haben entweder in der Messung der unter gegebenen Verhältnissen zur disruptiven Entladung nöthigen Electricitätsmengen oder der Potentialdifferenz zwischen den Electroden im Augenblicke des Funkenüberganges bestanden. Bezüglich dieser Arbeiten verweise ich auf: „Wiedemann, Lehre von der Electricität.“ IV. 2. S. 649—663, an welcher Stelle sich eine kritische Uebersicht über alle diese Untersuchungen findet mit Ausnahme einer in neuester Zeit erschienenen von G. A. Liebig.¹⁾ Was von diesen Messungen mit den meinigen Bezug hat, werde ich an geeigneter Stelle anführen.

Die Bestimmung der Potentialdifferenz im Augenblicke des Funkenüberganges in absolutem Maasse geschah bei den früheren Arbeiten mit dem absoluten Electrometer von Thomson. Die Messungen mit diesem Instrumente leiden an dem Mangel einer continuirlichen Ablesung und liefern nach den Angaben der betreffenden Beobachter besonders bei kleinen Funkenstrecken sehr schwankende Werthe.

Wie aus Versuchen von Herrn Quincke²⁾ und Herrn Czermak³⁾, sowie meinen Vorversuchen hervorgeht, eignet sich das Righi'sche Reflexionselectrometer wegen der continuirlichen Ablesung und der Leichtigkeit, zwischen weiten Grenzen (von 3 bis ca. 90 electrostatischen absoluten C.-G.-S.-Einheiten) sich je nach Bedarf empfindlich oder unempfindlich justiren zu lassen, besonders zu derartigen Messungen. Mit diesem Electrometer, zu dessen Aichung auf absolutes Maass eine Kirchhoff'sche Potentialwage diente, welche Herr Czermak nach den Principien der von Quincke³⁾ beschriebenen Wage con-

1) Liebig, Phil. Mag. 5. 24. p. 106. 1888.

2) Quincke, Wied. Ann. 19. p. 545. 1883.

3) Czermak, Wien. Ber. 97. Abth. 2. p. 307. 1888.

struiert hatte, unternahm ich auf Anregung von Herrn Prof. Kundt die vorliegende Arbeit.

Zunächst habe ich in freier Zimmerluft bei verschiedener Entfernung und verschiedenem Radius der als Electroden dienenden Kugeln, dann in einem kleineren abgeschlossenen Volumen, gefüllt mit Luft, Wasserstoff und Kohlensäure, bei verschiedenen Drucken die zum Funkenübergang erforderliche Potentialdifferenz bestimmt.

§ 1. Versuchsanordnung. — Dieselbe schloss sich im wesentlichen der von Czermak beschriebenen an. Die Aufstellung der Apparate geschah nach dem Schema Fig. 1, zu welchem Folgendes zu bemerken ist: Electrometer *R*, Wage *W* und Fernrohr *F* standen auf Steinpfeilern. Die isolirten 2,5 mm dicken Kupferdrähte *D* waren theils frei durch die Luft geführt, theils mit Paraffin in Glasröhren eingeschmolzen. Geeignete Vorrichtungen gestatteten, das Leitersystem vom Fernrohre aus zu laden und zu entladen. Die Holtz'sche Maschine *H* gab bei der Rotation beider Scheiben und Isolirung beider Pole in trockener Luft Funken von 10 cm Länge. Gewöhnlich genügte die Drehung nur einer Scheibe. Wenn die Maschine bei zu feuchtem Wetter nicht anging, trocknete ich entweder durch Erwärmen der Glasscheiben, oder stellte auf den Rath von Hrn. Prof. Kundt in ihren Glaskasten eine Kältemischung, welche die Wasserdampftheilchen binnen sehr kurzer Zeit in Form von Reif auf ihrer Oberfläche condensirte. Letztere Maassregel bewährte sich bei einiger Sorgfalt selbst bei 85% relativer Feuchtigkeit.

Die Leydener Batterie *B*, welche zur Vergrößerung der Capacität des geladenen Systems diene, bestand aus sieben 30 cm hohen und 10 cm im Durchmesser fassenden cylindrischen Leydener Flaschen, welche eine Wanddicke von 3 mm und innen und aussen Stanniolbekleidung hatten.

Die Justirung der Wage geschah genau nach den Angaben von Czermak. Statt des Telephons *J* wurde zur Controle auch ein Galvanometer bei *J* eingeschaltet, welches vom Fernrohr aus beobachtet werden konnte, ergab indess genau dieselben Resultate. Bei den endgiltigen Messungen arbeitete ich stets mit Telephon. Zur Bestimmung der absoluten Potentialdifferenz diene ein Schutzringcondensator, welchen schon Czermak

benutzt hatte. Zur Controle der mit diesem gefundenen Werthe wandte ich auch einige mal einen Condensator ohne Schutzring an, dessen Platten einen Durchmesser von 16 cm und eine Dicke von 0,35 cm hatten.

Die Distanz der Platten, welche bei den Messungen zwischen 0,5 und 1,2 cm betrug, wurde bei beiden Condensatoren in der Czermak'schen Weise gemessen.¹⁾

Das Righi'sche Electrometer *R* zeigte bei den Vorversuchen starke Veränderungen des Nullpunktes. Derselbe verlegte sich nicht nur im Laufe einer Messungsreihe, sondern schon bei einem einzigen grösseren Ausschlage um 3 bis 4 Scalentheile nach der Seite des Ausschlages hin. Quincke hat solche Veränderungen bis $\frac{1}{20}$ des ganzen Werthes beobachtet, und Czermak klagt ebenfalls darüber. Da es mir daran lag, die Angaben des Electrometers auf 1% verbürgen zu können, um etwaige Unregelmässigkeiten bei den Funkenübergängen besser zu übersehen, suchte ich solche Uebelstände zu beseitigen. Als Ursache stellte sich eine Verunreinigung der Oberfläche der zur Dämpfung dienenden Schwefelsäure heraus, welche hauptsächlich deshalb solche Störungen verursachen konnte, weil der hineinragende Platindraht zu dick war. Erst, nachdem ich diesen entfernt und einen solchen von höchstens $\frac{1}{10}$ mm Dicke angebracht und zugleich auf die Reinigung desselben und der Schwefelsäure die peinlichste Sorgfalt verwendet hatte, vermied ich die Nullpunkts-Verlegungen fast vollständig und konnte 14 Tage lang arbeiten, ohne eine Veränderung am geeichten Electrometer befürchten zu müssen.

Das Fernrohr *F* hatte 2 m Abstand vom Electrometer. Es wurden noch die Zehntel mm Scalentheile geschätzt.

Als Funkenmikrometer *V* diente ein Riess'sches. Doch waren die Zuleitungsstäbe zu den Kugeln nicht horizontal, sondern unter einem Winkel von 45° mit der Horizontalen angebracht, um durch einfaches Drehen derselben immer frische Stellen der Kugeln einander gegenüber zu stellen.

Die Messung der Kugeldistanz geschah in folgender Weise: Die bis zur festen Berührung aneinandergeschraubten Kugeln wurden sammt einem Galvanoskop *G* in den Stromkreis eines Daniell *K* geschaltet; die Magnetnadel nahm eine bestimmte Aus-

1) Siehe Dissertation p. 5.

schlagstellung ein. Bei langsamem Zurückschrauben der Mikrometerschraube hörte die Berührung der Kugeln in einem Augenblicke auf, welcher sich durch das Zurückschnellen der Magnetnadel in ihre Ruhelage scharf bestimmen liess. Von dem so fixirten Punkte der Trommel an zählte ich die Entfernung der Kugeln. Das Mikrometer wurde fest aufgestellt, die eine Kugel mit der geladenen Belegung der Leydener Batterie, die andere mit der Gasleitung in Verbindung. Geeignete Vorrichtungen gestatteten eine leichte Einschaltung in den Galvanoskop-Stromkreis zum Einstellen der Distanz. Die Kugeln des Funkenmikrometers bestanden aus Messing. Ihre Reinigung vor jedem Messungssatz geschah durch Abreiben mit dem feinsten Schmirgel und Nachputzen mit einem Lederlappen.

Zum Zweck der Messungen in verdünnter Luft und anderen Gasen befand sich das Funkenmikrometer unter einer Glasglocke auf einem gewöhnlichen Luftpumpenteller. Die Glasglocke hatte einen Umfang von 65 cm und eine Höhe von 25 cm. Die nächste Entfernung von den Kugeln bis zur Glockenwand betrug ca. 5 cm. Durch den Teller waren zwei Zuleitungsdrähte luftdicht eingeführt: der eine, durch Glasröhren und Schellack isolirt und mit Siegelack eingekittet, stand mit dem geladenen Pole der Influenzmaschine, der andere mit der Gasleitung in Verbindung. Letzterer führte zu dem abzuleitenden Pole des Funkenmikrometers. Das Innere der Glasglocke wurde mit einem Drahtnetz bekleidet und dies zusammen mit allen anderen Metalltheilen im Inneren der Glocke zur Erde geleitet. Die von der Luftpumpe zur Glasglocke führende Glasröhre stand in Verbindung mit einem offenen Quecksilbermanometer *M*, dessen Höhe unter Hinzuziehung des Barometerstandes den Druck bis auf 1 mm genau ergab. Glasglocke, Luftpumpenteller, Manometer und die zugehörigen Glasröhren waren luftdicht miteinander verkittet und konnten während einer Funkenmessung durch einen Glashahn von der Luftpumpe getrennt werden.

Die Luft, der Wasserstoff und die Kohlensäure, welche zur Untersuchung gelangten, wurden in Wasser gereinigt, sorgfältig durch Schwefelsäure oder Chlorcalciumröhren getrocknet und durch Baumwolle filtrirt. Die Darstellung des Wasser-

stoffs geschah aus Zink und Schwefelsäure, diejenige der Kohlensäure aus Marmor und Salzsäure. Zur Füllung der Glocke mit diesen Gasen pumpte ich bis auf 10 mm Druck aus und liess das Gas in langsamem Strome bis Atmosphärendruck ein. Bei Luft und Wasserstoff genügte eine zweimalige, bei Kohlensäure erst eine dreimalige Wiederholung dieser Operation, bis ich constante Resultate erhielt.

§ 2. Berechnungen. — Zur Berechnung der mit der Wage gemessenen absoluten Potentiale V im electrostatischen C.G.S.-System diente die bekannte Formel:

$$V = D \sqrt{\frac{8 \pi \cdot g \cdot w}{A}}$$

D = Abstand in cm, w = Gewicht in g, A = Fläche in qcm. Als Ausdruck für die corrigirte Fläche A der angezogenen Platte nahm ich bei dem Schutzringcondensator den von Maxwell¹⁾ gegebenen Ausdruck:

$$A = \frac{\pi}{2} \left\{ R^2 + R'^2 + (R^2 - R'^2) \frac{\alpha}{D + \alpha} \right\},$$

in welchem:

R' der innere Radius des Schutzringes = 6,098 cm,

R der Radius der angezogenen Platte = 5,963 cm,

$\alpha = 0,22064 (R' - R)$ ist.

Die Justirungsvorrichtung der Wage erlaubte, Schutzring und bewegliche Platte genau in eine Ebene zu bringen, und machte somit weitere Correctionen unnöthig. Die Platten wurden frisch abgeschliffen und spiegelblank polirt; dabei wurde die kleine Mulde in der unteren Platte, welche Herr Czermak noch berücksichtigen musste, entfernt.

Bei dem gewöhnlichen Condensator berechnete ich die Fläche A unter Zugrundelegung der von Kirchhoff²⁾ angegebenen Randcorrection zu:

$$A = R \left(R \pi + D + b l g \frac{D + b}{b} \right),$$

wo b die Dicke der Platte bedeutet.

Die Electrometercurve wurde zunächst in der von Czermak angegebenen Weise durch Berechnung der absoluten

¹⁾ Maxwell, § 218a.

²⁾ Kirchhoff, Ges. Abhandl. p. 112.

Potentiale für Ausschläge von 10 zu 10 Scalentheilen bestimmt. Es zeigte sich dabei, dass die Ausschläge n mit den Potentialen V durch die Formel verknüpft waren:

$$V^2 = \beta n - \alpha n^2.$$

Je grösser die Constante β ist, desto unempfindlicher ist das Electrometer justirt.

Als Beispiel gebe ich in folgender Tabelle die beobachteten Werthe V einer Aichung¹⁾ neben den nach der Formel $V^2 = 19,214 n - 0,005905 n^2$ berechneten V' an.

$n = 1,7$	4,3	8,5	17,1	26,0	43,3	60,9	87,6	105,6	133,2	151,3
$V = 5,72$	9,04	12,79	18,09	22,16	28,60	33,85	40,45	44,31	49,53	52,62
$V' = 5,68$	9,04	12,79	18,08	22,25	28,65	33,89	40,46	44,31	49,53	52,62

Das Electrometer zeigte erst 14 Tage nach dieser Aichung Störungen im Nullpunkt und wurde bis dahin noch dreimal geaicht. Es ergaben sich dabei folgende Werthe der Constanten α und β :

Distanz der Platten cm	β	α
0,8651	19,214	0,0059
0,7659	19,484	0,0052
0,7551	19,053	0,0066
0,7533	19,054	0,0055
Mittl. Werthe	19,201	0,00581

Die grösste Abweichung von $2\frac{1}{2}\%$ liefert für die Potentiale eine grösste Abweichung von $1\frac{1}{2}\%$.

Wie mir weitere Versuche zeigten, ist die angegebene Formel bis zu einem Ausschlage von 300 mm Scalentheilen gültig. Diese Formel gewährte zwei Vortheile: Zunächst erleichterte sie die Aichung. Es genügt eine Festlegung von fünf oder sechs Punkten der Curve, anstatt von 10 zu 10 Scalentheilen die Potentiale zu bestimmen. Eine Aichung nach Czermak beansprucht zwei Stunden Zeit (abgesehen von der Distanzmessung), während welcher sich die Distanz der Condensatorplatten infolge des stetigen Gebrauches erheblich ändern konnte, während fünf Punkte in $\frac{1}{2}$ Stunde festzulegen sind. Ein zweiter Vortheil zeigte sich bei feuchtem Wetter. Die Abnahme der Isolation machte nämlich ein sicheres Ablesen grösserer Ausschläge bei der

1) Siehe Dissertation p. 8 bis 10.

Aichung unmöglich, während bei der Funkenmessung das Spiel der Holtz'schen Maschine vom Fernrohr aus so geregelt werden konnte, dass auch bei schlechter Isolation Messungen grösserer Ausschläge gelangen. Die Formel machte es dann möglich, die grösseren nicht mehr geachteten Ausschläge (bis zu 300 mm Scalentheilen) für die Funken zu berechnen, ohne Fehler über 1% befürchten zu brauchen.

Das gewöhnliche Messungsverfahren bestand nun darin, dass die Curve des Electrometers sofort nach seiner Justirung etwa durch zehn Punkte bestimmt wurde. Dann folgten Funkenmessungen unter stetiger Controle der Electrometercurve vor und nach jeder grösseren Messungsreihe durch kleinere Aichungen. Bei Eintritt von Unregelmässigkeiten verwarf ich alle unsicheren Messungsreihen und justirte das Electrometer von neuem.

§ 3. Funken zwischen Kugeln von verschiedenem Radius in freier Zimmerluft. — Messungen der Potentialdifferenz in absolutem Maass liegen vor von Thomson¹⁾ und sehr ausführliche von Baille.²⁾ Letzterer hat bei verschiedenem Krümmungsdurchmesser und verschiedenen Abständen der Electrodenkugeln mit einem absoluten Electrometer von Thomson die zum Funkenübergang nöthige Potentialdifferenz in electrostatischen absoluten C.-G.-S.-Einheiten bestimmt. Er findet bei bestimmtem Kugelradius der Electroden das Potential des geladenen Pols bei abgeleiteter anderen als Function des Abstandes der Kugeln in Gestalt einer bei kleinen Abständen schwach gekrümmten, von 0,1 cm an fast geradlinig verlaufenden Curve. In Bezug auf verschiedene Kugelradien kommt er zu dem Resultat, dass bei jeder Funkenstrecke für einen bestimmten Radius der Kugeln ein Maximum der Potentialdifferenz zum Funkenübergang erforderlich ist, und zwar weisen bei kleinen Funkenstrecken die kleinsten Kugeln, bei grösseren die grossen Kugeln das Maximum auf.

Auch Macfarlane³⁾ hat in freier Zimmerluft Funken gemessen. Die von ihm gegebenen Werthe sind ebenso, wie

1) Thomson, Proc. Roy. Soc. Bd. X. p. 326. Febr. 25. Apr. 12. 1860.

2) Baille, Ann. de chim. et de phys. 25. p. 486. 1882.

3) Macfarlane, Phil. Mag. (5) 10. p. 389. 1880.

die Thomson'schen Werthe kleiner, als diejenigen späterer Beobachter. Nach der von mir benutzten Methode haben bereits Funken gemessen Quincke und Czermak, doch nur beiläufig und zur Controle anderer absoluter Messungen. Die Messungen dieser Herrn ergeben Werthe, welche mit den Baille'schen gut¹⁾ übereinstimmen, dagegen die von Thomson und Macfarlane gefundenen weit überragen. Indem es mir wünschenswerth schien, diese Werthe möglichst genau festzustellen, damit das Funkenmikrometer als Electrometer für hohe Spannungen dienen kann, wiederholte ich diese Messungen.

Die Electrodenkugeln bestanden aus Messingkugeln von 1 cm, 0,5 cm und 0,25 cm Radius. Die geladene Kugel war bei kleinen Funkenstrecken ohne Unterschied mit dem negativen oder positiven Pole der Influenzmaschine verbunden, da beide Anordnungen dieselben Werthe ergaben. Bei grösseren Abständen musste ich stets mit negativer Electricität laden, weil die bei hoher positiver Spannung leicht auftretenden Büschel- und Glimm-Entladungen die Beobachtung sehr erschwerten, ja unmöglich machten. Es trat nämlich dann die Erscheinung ein, dass trotz schnellster Drehung der Influenzmaschine kein Funke zu Stande kam. Der Electrometerschlag war bis zu einem Punkte zu treiben, der kurz vor der zu erwartenden Entladungsstelle lag, blieb aber dann bei sehr schneller Rotation constant, nahm dagegen bei langsamerer schnell ab. Bei negativer Ladung konnte ich mit gleichmässiger, langsamer Drehung bis zu dem bestimmten Entladungspotential gelangen. Dabei bewegte sich die Electrometernadel gleichmässig vorwärts, bis sie im Augenblicke der Entladung bei einem ganz bestimmten Theilstrich zur Ruhelage zurückschnellte.

Eine Messung verlief in folgender Weise. Nachdem die Kugeln geputzt waren, wurde der zu messende Abstand eingestellt und sofort ein Beobachtungssatz von vier bis acht Funken in Zwischenräumen von je ungefähr einer Minute gewonnen. Dabei zeigte sich bald, dass der erste Funke fast durchgängig ein etwas kleineres, die folgenden dasselbe etwas höhere Potential

1) In der Czermak'schen Tabelle IV ist bei der Angabe der Baille'schen Werthe ein Versehen vorgekommen. Diese Zahlen beziehen sich nicht auf 1, 0,5, 0,25 cm Radius, sondern Durchmesser; hierdurch ist die dort bemerkte Abweichung zu erklären.

hatten. Als Grund hierfür mag eine Veränderung der metallischen Oberfläche durch den ersten Funken anzusehen sein. Ich machte z. B. folgende Beobachtungssätze für die Kugeln von 1 cm Radius:

Funkenlänge = 0,2 cm			Funkenlänge = 0,4 cm			Funkenlänge = 0,7 cm		
Nr. des Funken	Electrom. Ausschlag n	Potential V	Nr. des Funken	Electrom. Ausschlag n	Potential V	Nr. des Funken	Electrom. Ausschlag n	Potential V
1	35,1	27,65	1	114,4	49,47	1	306,2	78,63
2	35,4	27,79	2	114,8		2	310,8	
3	35,6	27,87	3	115,9		3	312,4	
4	35,5	27,83	4	115,5		4	311,2	
			5	116,4	49,90	5	312,2	
Mittel aus 2-4	35,50	27,83 ¹⁾	6	116,1		6	311,3	
			7	115,5		7	311,2	
			8	114,3	49,45	8	312,7	
			9	116,0		9	313,9	79,53
			10	115,4		10	310,6	79,15
			11	115,1		11	312,2	
			12	116,3		12	313,4	
			13	116,0				
			14	116,3		Mittel aus 2-12	311,99	79,32 ¹⁾
			Mittel aus 2-14	115,66	49,74 ¹⁾			

Der erste Funke wurde stets besonders berechnet. Aus den folgenden Ausschlägen wurde das Mittel zur Berechnung verwendet. Zur Festlegung jedes Funkens dienten vier bis acht solcher Beobachtungssätze. So erhielt ich z. B. für den Funken von 0,4 cm Länge folgende Beobachtungssätze an ganz verschiedenen Tagen bei derselben Electrometerjustirung:

$$n_1 = 114,4 \quad 110,0 \quad 112,0 \quad 112,8 \quad 113,3 \quad 114,0 \quad 113,9 \quad 113,6$$

$$n_m = 115,66 \quad 114,00 \quad 112,40 \quad 113,53 \quad 114,48 \quad 114,60 \quad 114,50 \quad 113,85$$

$$\text{Mittel } n_1 = 113,00 \quad n_m = 114,13$$

Die dazu gehörigen Potentiale $V_1 = 49,17 \quad V_m = 49,41$.

n_1 bedeutet den Electrometerrausschlag bei dem ersten, n_m das Mittel aus den Ausschlägen bei den folgenden Funken.

Die Quadratwurzel aus diesen Ausschlägen n geht in die Formel für die Potentiale ein, sodass die grösste Differenz unter den zugehörigen Potentialwerthen etwa $1\frac{1}{2}\%$ beträgt.

1) Diese Potentialwerthe gehören zu den Mitteln aus den Ausschlägen.

Die kleinsten Funkenstrecken von 0,01 bis 0,15 cm wurden bei besonders empfindlicher Justirung des Electrometers, die grösseren bei unempfindlicherer gemessen. Dabei kamen einzelne Funkenstrecken, z. B. diejenige von 0,1 cm zweimal zur Messung. Ausserdem hatte ich gerade diese und einzelne andere Funkenstrecken bei noch einer dritten Electrometerjustirung gemessen. Diese Messungen bei drei verschiedenen Empfindlichkeiten des Electrometers ergaben z. B. folgende drei Werthe für die Funkenstrecke 0,1 cm bei den Kugeln von 1 cm Radius: Zur Beurtheilung der Empfindlichkeit des Electrometers füge ich die Constante β der Curve bei:

β	V_1	V_m
9,63		15,87
11,50	15,86	15,90
22,06	15,96	16,08

Unter V_1 stehen die zum Mittel der ersten Funken jeder Einstellung, unter V_m die zum Mittel der folgenden Funken gehörigen Potentiale. Die Abweichungen sind nicht grösser, als diejenigen verschiedener Messungssätze bei derselben Electrometerjustirung und als lediglich durch die Unregelmässigkeit des Funkenüberganges bedingt anzusehen.

Folgende Tabellen geben als Mittelwerthe aller Messungen zunächst die kleineren, bei empfindlicher Electrometerjustirung gemessenen Funkenstrecken und dann die grösseren, bei unempfindlicher erhaltenen Potentiale. Die Messungen geschahen im Winter in einem 10 bis 15° C. warmen Zimmer und an möglichst trockenen Tagen. Die Feuchtigkeit der Luft scheint einigen Einfluss zu haben und wurde daher für jede Messung notirt.

Mittlerer Barometerstand 756 mm, mittlere Temperatur 15° C, die relative Feuchtigkeit schwankte zwischen 43 und 56 %.

a. Kleine Funkenstrecken.

Funkenlänge δ in cm	1 cm Radius		0,5 cm Radius		0,25 cm Radius	
	V_1	V_m	V_1	V_m	V_1	V_m
0,01	3,38	3,35	3,42	3,45	3,61	3,67
0,02	5,04	5,12	5,18	5,18	5,58	5,40
0,03	6,62	6,65	6,87	6,94	6,94	6,93
0,04	8,06	8,12	8,22	8,31	8,43	8,43
0,05	9,56	9,56	9,75	9,75	9,86	10,04
0,06	10,81	10,83	10,87	10,97	11,19	11,20
0,07	11,78	11,97	12,14	12,20	12,29	12,30
0,08	13,40	13,39	13,59	13,60	13,77	13,77
0,09	14,39	14,45	14,70	14,72	14,89	14,87
0,10	15,86	15,90	15,97	15,99	16,26	16,30
0,11	16,79	16,93	17,08	17,11	17,26	17,24
0,12	18,28	18,31	18,42	18,47	18,71	18,71
0,14	20,52	20,58	20,78	20,84	21,26	21,20

Die Electrometercurve ist durch fünf Aichungen festgelegt
($\beta = 11,50$).

b. Grosse Funkenstrecken.

Funkenlänge δ in cm	1 cm Radius		0,5 cm Radius		0,25 cm Radius	
	V_1	V_m	V_1	V_m	V_1	V_m
0,10	15,96	16,08	16,11	16,36	16,45	16,53
0,15	21,94	22,06	22,17	22,35	22,59	22,69
0,20	27,59	27,75	27,87	28,12	28,18	28,75
0,25	32,96	33,24	33,42	33,46	33,60	33,61
0,30	38,56	38,85	39,00	38,94	38,65	38,74
0,35	43,93	44,24	44,32	44,34	43,28	43,48
0,40	49,17	49,41	49,31	49,45	47,64	47,68
0,45	54,37	54,54	54,18	54,27	51,56	51,87
0,50	59,71	60,05	59,03	59,21	54,67	54,82
0,55	64,60	64,88	63,35	63,58	57,27	57,76
0,60	69,27	69,36	67,80	68,20	59,95	60,13
0,70	78,51	78,87	75,04	75,36	63,14	63,96
0,80	87,76	87,79	81,95	82,61	66,39	66,83
0,90					68,65	69,01
1,00					70,68	71,69
1,20					74,94	75,17
1,50					79,42	79,93

Die Electrometercurve ist durch vier Aichungen festgelegt
($\beta = 22,06$).

Zu den Tabellen ist Folgendes zu bemerken: Aus der graphischen Darstellung der Potentiale V als Functionen von δ (Fig. 2, der Maassstab der Abscissen ist der 167 fache von dem

der Ordinaten) ersieht man, dass die Curven schwach gekrümmte Linien sind, um so schwächer, je grösser der Radius der Elektrodenkugeln ist. Durch die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung, durch welche Macfarlane seine Beobachtungen wiedergibt, liessen sie sich nicht darstellen.

In Uebereinstimmung mit den Baille'schen Werthen haben die kleinsten Kugeln bei Funkenstrecken unter ca. 0,25 cm das grösste Potential; von dieser bis zur Funkenstrecke 0,42 cm weisen die mittleren Kugeln ein Maximum des Potentials auf, und für noch grössere Funkenstrecken gehört das Maximum den grössten Kugeln. In der Tabelle sind die Maxima fett gedruckt.

Zur weiteren Bestätigung dieser Gesetzmässigkeit wurden Kugelcalotten von noch grösserem Krümmungsradius untersucht. Dazu dienten Uniformknöpfe, deren Krümmungsradius an den Stellen, an welchen der Funke übersprang, zu 3,07 cm durch Spiegelung bestimmt wurde. Sie ergaben bei kleinen Funkenstrecken noch kleinere Werthe für das Potential und erst für $\delta = 0,8$ cm ein Maximum. Doch wird das Maximum bei Vollkugeln von 3,07 cm Radius wahrscheinlich eher erreicht sein.

Die absoluten Werthe aller von mir im Winter unter nahezu gleichen atmosphärischen Verhältnissen an verschiedenen Tagen gemessenen Potentiale stimmen unter sich auf $1\frac{1}{2}\%$ überein. Dagegen ist die Uebereinstimmung mit den von anderen Beobachtern gefundenen Werthen nicht eine so gute. Als ich indess im Sommer bei ungefähr 8° höherer Temperatur und bedeutend grösserem absoluten Feuchtigkeitsgehalt der Luft einige Messungen wiederholte, fand ich kleinere Zahlen, und zwar Abweichungen bis 4% mit den im Winter erhaltenen.

Ich erhielt nämlich fast dieselben Zahlen, welche Czermak unter gleichen atmosphärischen Verhältnissen nach derselben Methode gefunden hat. Ich gebe für die Kugeln von 1 cm Radius folgende Zusammenstellung von Messungen verschiedener Beobachter. Die Werthe von Baille für die Halbmesser 0,25 und 1,0 cm sind interpolirt, da er keine Kugeln von genau diesen Radien benutzte.

Werthe für das Potential V bei Kugeln von 1 cm Radius.

δ in cm	Baille	Quincke	Czermak	Paschen	
				im Winter	im Sommer
0,1	15,12	14,78	15,14	16,08	15,84
0,2	26,37	26,39	26,57	27,75	26,74
0,3	36,96	37,31	37,50	38,85	37,88
0,4	47,20	46,69	47,69	49,41	48,26
0,5	54,81			60,05	58,35
0,6	65,23			69,36	69,01
0,7	73,04			78,87	

Werthe für das Potential V bei Kugeln von 0,25 cm Radius.

δ in cm	Baille	Czermak	Paschen im Winter
0,1	15,73	16,06	16,53
0,2	26,94	27,46	28,75
0,3	36,94	37,60	38,74
0,4	43,32	46,26	47,68
	44,52		
0,5	50,83		54,82
0,6	57,31		60,13
0,7	61,12		63,96
0,8	64,17		66,83
0,9	65,98		69,01
1,0	67,22		71,69

Werthe für das Potential V bei Kugeln von 0,5 cm Radius.

δ in cm	Baille	Czermak	Paschen im Winter
0,1	15,25	15,80	16,18
0,2	26,78	27,22	28,12
0,3	37,32	37,76	38,94
0,4	45,50	47,77	49,45
	47,62		
0,5	54,66		59,21
0,6	65,23		68,20
0,7	72,28		75,36
0,8	77,61		82,61

Die Baille'schen Werthe stimmen indess unter sich nicht auf 1% überein. Es sind in den betreffenden Tabellen bei jedem Kugelradius für $\delta = 0,40$ und $\delta = 0,45$ cm je zwei verschiedene Werthe angegeben. Unter diesen kommen Abweichungen von 5% vor, z. B. findet sich für dieselbe Grösse einmal die Zahl 26,62, dann aber auch die Zahl 28,49, oder 47,62 und 45,50, oder 51,60 und 49,63, 50,44 und 48,42 angegeben, Abweichungen unter gleichen atmosphärischen Verhältnissen, wie ich sie nicht für dieselbe Grösse erhalten habe. Die von mir gefundenen Werthe sind indess ausnahmslos und theilweise erheblich grösser, als die von Baille angegebenen. Die Differenz beträgt bis 8%. Genügende Gründe kann ich dafür nicht angeben¹⁾

1) Eine in neuester Zeit erschienene und mir erst nach Beendigung dieser Arbeit bekannt gewordene Untersuchung von G. Jaumann (Ein-
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVII.

Die neuesten Untersuchungen über diesen Gegenstand sind diejenigen von G. A. Liebig, welcher allerdings in einem abgeschlossenen Volumen zwischen Kugelcalotten von 9,76 cm Krümmungsradius die Funkenstrecken untersuchte. Seine Werthe liegen, wie zu erwarten, für kleine Funkenstrecken noch unterhalb meiner Werthe für die Calotten von 3,07 cm Radius und werden erst bei ca. 0,85 cm grösser als diese, zeigen also eine gute Uebereinstimmung mit meinen Resultaten. Besonders sind sie um fast dieselben procentischen Beträge grösser, als die aus den Baille'schen Zahlen für den Kugelradius 9,76 cm interpolirten Werthe, um welche auch meine Werthe die letzteren überragen.

Einfluss der Zuleitungen zu den Kugeln. — Dieselben befanden sich bei den angegebenen Messungen auf cylindrischen Messingstäbchen von 0,33 cm Dicke. Ich brachte nun solche von 0,5 cm und 0,07 cm Dicke an und fand bei den grossen und mittleren Kugeln genau dieselben Werthe für alle Funkenstrecken bis 0,7 cm hin. Bei den kleinsten Kugeln stellten sich indess für Funkenstrecken über 0,5 cm einige bemerkenswerthe Abweichungen heraus. Für kleinere Funkenstrecken erhielt ich dieselben Werthe bei allen drei Zuleitungen. Für grössere, als 0,5 cm erhielt ich 1. bei den dickeren Zuleitungen grössere Potentialwerthe, 2. bei den dün-

fluss rascher Potentialänderungen auf den Entladungsvorgang. Wien. Ber. 97. (2). p. 765. 1888) scheint eine Erklärung der erwähnten Differenzen zu ermöglichen. J. weist nach, dass bei einer Anordnung, wie sie von den angeführten Beobachtern und mir benutzt wurde, das Entladungspotential durch „die statischen Verhältnisse des Entladungsfeldes“ allein nicht bestimmt sei, sondern eine etwaige schnelle Aenderung der Potentialdifferenz als wesentliche Entladungsbedingung hinzutrete, sodass um so höhere Funkenpotentiale erhalten werden, je vollständiger durch die Versuchsanordnung „die Stromschwankungen der Influenzmaschine gedämpft werden, oder je ruhiger die angewandte Stromquelle ist“. Bei einer Influenzmaschine ist durch Vergrösserung der Capacität des geladenen Leitersystems diese Dämpfung zu erreichen. Bei meiner Anordnung war eine weit grössere Capacität vorhanden, als bei denen der erwähnten Beobachter, und meine Werthe sind auch grösser ausgefallen, als alle früheren. Der Jaumann'schen Tabelle (S. 778) entsprechen demnach meine Werthe, indem sie die unter I angegebenen, welche sich auf eine Funkenstrecke mit nebengeschaltetem Spitzenpaar beziehen, noch um ein wenig überragen.

neren noch kleinere, als früher. Es ergaben sich z. B. folgende Werthe für die Kugeln vom Radius 0,25 cm:

Potentiale für die Funkenstrecke δ .

Durchmesser der Zuleitungsdrähte cm	$\delta = 0,15$	0,35	0,50	0,70	1,00	1,20	1,50
0,07	22,6	43,6	54,1	62,5	68,9	72,4	76,5
0,33	22,5	43,3	54,9	64,1	71,9	75,1	79,9
0,50	22,7	43,7	55,3	65,1	73,9	77,6	—

Von $\delta = 0,5$ an zeigt sich deutlich ein Wachsen der Potentialwerthe mit wachsender Dicke der Zuleitungen. Der Grund für diese Verschiedenheit ist in der auf kleinen Kugeln zur Geltung kommenden verschiedenen Vertheilung der Electricität durch die Influenzwirkung der dickeren oder dünneren Zuleitungsstäbe zu suchen.

§ 4. Funken bei verschiedenen Drucken und in verschiedenen Gasen. — Bei den folgenden Versuchen befindet sich die Funkenstrecke in einem abgeschlossenen Raume von ungefähr 8 Litern. Natürlich durfte ich hier nicht mehr eine so gute Uebereinstimmung der Werthe untereinander erwarten; denn 1. konnte das Gas durch den Funken zersetzt werden¹⁾; 2. war es unmöglich, wie bisher, nach vier bis acht Funken die durch diese veränderte Oberfläche der Kugeln zu putzen. Ueber letzteren Umstand stellte ich einige Messungen an, indem ich in freier Zimmerluft an 30 Funken hintereinander in Intervallen von je $\frac{1}{2}$ Minute bei derselben Einstellung des Funkenmikrometers beobachtete, dann die ganze Anordnung eine Stunde stehen liess und wieder Funken mass. Ich erhielt dabei kein anderes Resultat, als dass der erste Funke bei reiner Metallschicht allein ein kleineres, die folgenden bei angegriffener alle dasselbe höhere Potential hatten. Liess ich die Kugeln dann mit ungeputzter Oberfläche längere Zeit stehen, so erhielt ich nachher als ersten Electrometerschlag einen weit grösseren und bei den folgenden Funken

1) Eine Temperaturerhöhung des Gases hat nach einer späteren Bemerkung keinen Einfluss.

wieder die früheren mittleren. Es ist hiernach möglich, dass durch den electricischen Funken Veränderungen an der metallischen Oberfläche entstehen, welche in Berührung mit der Luft noch fortschreiten und das Entladungspotential in merklicher Weise erhöhen. Dasselbe fand unter der Glasglocke statt, und zwar auch in Kohlensäure und Wasserstoff, bisweilen unter sehr grossen Abweichungen des ersten grösseren Funken nach längerem Stehenlassen, weshalb ich diesen ersten Funken nie beim Mittelnehmen berücksichtigte.

Der Unterschied im Potential, wenn das Funkenmikrometer in freier Luft oder unter der Glocke bei gewöhnlichem Luftdrucke stand, war bei kleinen Funkenstrecken gering; bei grösseren stellte sich unter der Glocke ein erheblich kleineres Entladungspotential heraus, als in freier Luft.

Als Electrodenkugeln dienten stets diejenigen von 1 cm Radius. Die Messungen in jedem der drei Medien konnten in gleicher Weise gemacht werden und verliefen wie folgende Beobachtungsreihe in Luft:

Funkenstrecke = 0,6 cm. Es wurde zweimal trockene, staubfreie Luft eingelassen. Dann begann die Messung bei einem Druck von 73,73 cm Quecksilber von 0° und wurde unter Auspumpen von ungefähr 20 zu 20 cm Quecksilber fortgesetzt. Bei jedem Drucke sperrte ich die Glocke ab und beobachtete dann ungefähr acht Funkenübergänge. Von dem Drucke 1,3 cm an wurde wieder Luft eingelassen und dabei bis Atmosphärendruck successive nach je 10 cm Druckzunahme ein Beobachtungssatz gemacht.

Bei dem Drucke 73,73 cm erhielt ich z. B. für die Electrometerausschläge die Zahlen: 231,3, 235,4, 233,4, 237,4, 236,9, 229,9, 242,4, 237,4, als ersten Ausschlag einen kleineren, da die Oberfläche der Kugeln vor dem Beobachtungssatze geputzt war.

Nach Berechnung der Mittel n in den einzelnen Sätzen ergaben sich folgende Zahlen:

Druck P in cm Qu.	73,73	52,69	33,71	13,20	1,30	6,45	13,02	22,92	32,94	44,62	52,55	62,22	73,73
n	235,4	133,3	65,84	15,41	0,86	5,77	15,40	35,79	62,19	105,0	133,1	174,3	238,5
Potentiale V	65,75	49,94	35,17	17,16	4,06	10,51	17,15	26,10	34,32	44,43	49,90	56,87	66,3

Ich machte für jede Funkenstrecke mehrere (zwei bis sechs) solcher Messungsreihen und interpolirte geradlinig für dieselben Drucke aus jeder Reihe für sich die zugehörigen Potentiale. Dabei erhielt ich z. B. folgende Zahlen für die Potentiale bei der Funkenstrecke 0,4 cm in Luft:

Druck P in cm Q.	Messungsreihen (Bezeichn. nach dem Datum der Messung)				Mittel
	25. 2. 88	18. 5. 88	26. 5. 88	29. 5. 88	
2	3,95	4,10	4,05	4,05	4,04
10	10,46	10,65	10,68	10,70	10,62
50	23,79	23,43	23,15	23,24	23,40
50		34,95	34,55	34,81	34,77
75		48,93	48,21	48,10	48,41

Die einzelnen Messungsreihen lieferten für gleiche Drucke sehr gut übereinstimmende Werthe, aus welchen das Mittel genommen wurde. Die Uebereinstimmung war indess bei kleinen Funkenstrecken wegen der kleinen Electrometerausschläge schlechter, bei grösseren noch besser, als im angeführten Beispiele, in Wasserstoff ebenso gut, in Kohlensäure nicht ganz so gut.

Die grössten Abweichungen wurden in Kohlensäure bei der Funkenstrecke 0,1 cm erhalten und betrugen, allerdings nur vereinzelt, bis 20%. Bei der Funkenstrecke 0,20 cm in diesem Gas stiegen die Abweichungen bereits nicht mehr über 10% und sanken bei grösseren Funkenstrecken auf 3 bis 5%.

Die folgenden Tabellen geben die Mittelwerthe aller meiner Messungen der Potentiale v der Funkenstrecken δ bei den Drucken P (in cm Quecksilber von 0°). Die über jeder Spalte befindlichen eingeklammerten Zahlen geben die Anzahl Messungsreihen an, aus denen die Zahlen erhalten sind. Die Temperatur in der Glocke war durchschnittlich 20° C.

Wasserstoff.

P	$\delta = 0,1^{(2)}$	$0,2^{(2)}$	$0,3^{(3)}$	$0,4^{(3)}$	$0,5^{(4)}$	$0,6^{(2)}$	$0,7^{(1)}$	$0,8^{(1)}$
2	1,52	1,70	2,01	2,02	2,91		3,31	
4	2,08	2,43	3,19	3,39	4,03	4,79	5,00	5,35
6	2,51	3,15	3,94	4,41	4,98	6,13	6,62	6,85
8	2,85	3,66	4,65	5,24	6,04	7,24	7,90	8,40
10	3,19	4,14	5,35	6,02	7,12	8,21	9,10	9,89
15	3,81	5,28	6,74	7,92	9,32	11,10	11,95	13,05
20	4,27	6,22	8,19	9,79	11,51	13,40	14,58	16,20
25	4,75	7,23	9,59	11,48	13,54	15,56	17,25	18,98
30	5,27	8,25	10,91	13,19	15,54	17,77	19,85	21,98
35	5,89	9,16	12,16	14,69	17,51	19,99	22,55	24,31

P	$\delta = 0,1^{(2)}$	$0,2^{(2)}$	$0,3^{(2)}$	$0,4^{(2)}$	$0,5^{(2)}$	$0,6^{(2)}$	$0,7^{(1)}$	$0,8^{(1)}$
40	6,52	10,17	13,48	16,21	19,43	22,27	25,10	27,13
45	7,09	11,13	14,79	17,78	21,34	24,49	27,52	
50	7,79	12,02	15,92	19,43	23,20	26,57	29,93	
55	8,59	12,78	17,02	20,98	25,09	28,61	32,25	
60	9,06	13,69	18,90	22,49	26,89	30,74	34,58	
65	9,64	14,92	19,57	23,99	28,78	32,89	36,85	
70	10,05	15,77	20,85	25,43	30,42	34,92	39,08	
75	10,44	16,38	21,75	26,77	32,05	36,80	41,10	

Luft.

P	$\delta = 0,1^{(4)}$	$0,2^{(6)}$	$0,3^{(3)}$	$0,4^{(4)}$	$0,5^{(3)}$	$0,6^{(5)}$	$0,7^{(2)}$	$0,8^{(1)}$	$1,00^{(1)}$
2	2,23	2,73	3,44	4,04	4,70	5,12	5,57	6,10	6,25
4	2,84	3,80	4,76	5,75	6,87	7,63	8,49	8,90	9,50
6	3,24	4,85	6,21	7,43	8,75	10,04	10,96	11,60	12,50
8	3,65	5,80	7,47	9,07	10,57	12,28	13,36	14,10	15,55
10	4,32	6,68	8,76	10,62	12,35	14,24	15,41	16,50	
15	5,83	8,88	11,64	14,04	16,54	19,12	20,70	21,62	
20	6,71	10,98	14,37	17,35	20,51	23,58	25,70	27,25	
25	7,95	12,72	17,00	20,36	24,23	27,82	30,82	32,70	
30	9,14	14,49	19,17	23,40	27,90	31,90	35,66		
35	10,03	16,15	21,62	26,60	31,47	35,99	40,42		
40	10,86	17,83	23,94	29,51	35,13	40,03	44,96		
45	11,65	19,51	26,08	32,13	38,73	44,08	49,52		
50	12,39	20,96	28,13	34,77	42,08	47,87	53,62		
55	13,24	22,37	30,39	37,53	45,45	51,47	58,02		
60	14,02	23,78	32,52	40,28	48,75	55,16	62,30		
65	14,79	25,23	34,68	42,95	51,99	58,96	66,40		
70	15,52	26,72	36,78	45,70	55,24	62,68			
75	16,33	28,29	38,83	48,41	58,49	66,32			

Kohlensäure.

P	$\delta = 0,1^{(3)}$	$0,2^{(3)}$	$0,3^{(3)}$	$0,4^{(3)}$	$0,5^{(4)}$	$0,6^{(4)}$
2	2,91	3,75	4,27	4,82	5,38	5,50
4	3,64	4,77	5,73	6,57	7,48	7,91
6	4,33	5,85	7,15	8,28	9,56	10,35
8	4,90	6,90	8,34	9,71	11,18	12,71
10	5,47	7,85	9,81	10,96	12,69	14,26
15	6,86	9,97	12,37	14,09	16,48	18,64
20	8,03	12,35	15,31	17,45	20,01	22,67
25	9,17	14,16	17,92	20,40	23,45	26,68
30	10,27	15,69	19,89	23,07	26,79	30,49
35	11,34	17,21	21,95	25,79	29,64	34,31
40	12,26	19,24	24,04	28,41	32,86	37,99
45	13,13	20,74	25,76	31,01	36,22	41,61
50	13,90	21,63	27,84	33,46	39,18	45,19
55	14,63	22,63	29,75	35,50	42,13	48,70
60	15,27	23,99	31,62	37,99	45,08	52,34
65	15,92	25,35	33,47	40,38	48,13	55,80
70	16,56	26,67	35,40	42,72	50,74	59,09
75	17,21	27,96	37,33	45,02	53,24	62,35

Nach diesen Tabellen kann man für jedes Gas zwei Arten von Curven construiren, indem man entweder das Potential V als Function des Druckes P , bei gleichbleibender Funkenstrecke δ , oder als Function von δ bei constantem P darstellt. Der allgemeine Charakter beider Arten von Curven ist derselbe. Es sind Linien mit einer schwachen, besonders im Anfang gut ausgeprägten Krümmung nach der Abscissenaxe zu. Ihre Form ähnelt derjenigen der Hyperbel; doch zeigte die Rechnung, dass sie nicht innerhalb der Beobachtungsfehler durch die Hyperbelgleichung darzustellen sind, indem sie regelmässige, wenn auch kleinere Abweichungen aufweisen.¹⁾ Das jedenfalls complicirte Gesetz dieser Linien hielt ich für werthlos zu ermitteln.

Der Einfluss des Druckes auf das Entladungspotential ist bisher nur in Luft, und zwar von Baille²⁾ und Macfarlane untersucht. Ersterer hat für Drucke von 25 bis 125 cm Quecksilber das Gesetz aufgestellt, dass das Potential V dem Druck P proportional sei, also V/P eine für jede Funkenstrecke constante Grösse sei, ein Gesetz, welches sich für seine Messungen bestätigt. Er erzeugte den Funken in einem Metallcylinder zwischen zwei Kugeln von 1,5 cm Radius.

Macfarlane mass den Funken zwischen zwei kreisförmigen Scheiben bei niederen Drucken in einer Glasglocke, von der er allerdings nicht schreibt, dass sie vor Influenzwirkungen geschützt war; er fand, dass Potentialdifferenz V und Druck P nach der Form einer Hyperbel voneinander abhängen. Wie seine Potentialwerthe für verschiedene Funkenstrecken bei gewöhnlichem Druck bedeutend kleiner³⁾ sind, als die von Baille für dieselben Verhältnisse angegebenen, und als die nach den Baille'schen Untersuchungen aus meinen Werthen für ebene Electroden berechneten, so auch seine Werthe für die Potentialdifferenz bei verschiedenen Drucken.⁴⁾

Baille hat leider nur für Funkenstrecken unter 0,25 cm die Abhängigkeit vom Druck untersucht. Mit den von ihm

1) Siehe Dissertation p. 24.

2) Baille, Ann. de chim. et de phys. (5) 29. p. 187. 1883.

3) Auch hier wäre nach Jaumann (s. o.) der Einfluss der angewandten Capacitäten in Betracht zu ziehen.

4) Siehe Dissertation p. 25.

gegebenen Werthen stimmen die meinigen (auf gleiche Kugelradien interpolirt) besser überein. Die Uebereinstimmung ist am besten für kleinere Drucke; doch habe ich das Gesetz der Proportionalität zwischen V und P nicht bestätigen können. Die Grösse V/P nimmt nach meinen Messungen mit wachsendem Druck zuerst schnell, dann langsamer ab. Wenn meine Curven genau einer Hyperbelformel folgten, so würde V/P für grosse Drucke allerdings innerhalb weiter Grenzen als constant gelten können, doch noch nicht für Drucke, wie sie Baille angewandt hat. Ich stelle für die Funkenstrecke 0,2 cm einige Werthe von Baille mit den meinigen zusammen. Die Baille'schen Werthe gelten für Electrodenkugeln von 1,5 cm Radius, die meinigen für 1,0 cm Radius.

P	Baille		Paschen	
	V	V/P	V	V/P
95,5	49,77	0,52		
85,5	44,02	0,51		
75,5	35,57	0,47	28,45	0,377
65,5	27,83	0,43	25,38	0,388
55,5	25,02	0,45	22,51	0,406
45,5	21,45	0,47	19,66	0,432
35,5	18,11	0,51	16,31	0,460
25,5	11,31	0,44	12,90	0,506
10			6,68	0,668

In Wasserstoff und Kohlensäure fand ich dasselbe Abnehmen der Grösse V/P . Leider ist die Abhängigkeit der Potentialdifferenz vom Druck nur für Luft, und zwar nur für einige wenige Funkenstrecken von den genannten Beobachtern untersucht. Für andere Gase liegen keine Messungen vor.

Vergleicht man nach meinen Tabellen die zwei Arten von Curven, welche für ein Gas das Potential als Function entweder des Druckes oder der Funkenstrecke darstellen, miteinander, so zeigt sich für beide zunächst aus einer graphischen Darstellung dieselbe Form. Beide sind schwach gekrümmte, fast hyperbelartige Linien. Eine Beziehung zwischen ihnen ergibt sich, wenn man die Producte aus Druck und Funkenstrecke $P \cdot \delta$ bildet und dann diejenigen Werthe von V aus der Tabelle abliest oder interpolirt, welche zu solchen Werthen von δ und P gehören, deren Product den gleichen Zahlenwerth hat. Diese

Werthe von V ergeben sich innerhalb der Fehlergrenzen als gleich, z. B. erhält man aus den Tabellen folgende Zusammenstellung:

Luft $P.\delta = 7,5$

P	δ	V
10	0,75	16,23
15	0,50	16,54
20	0,38	16,75
25	0,30	17,00
30	0,25	16,83
40	0,187	16,86
50	0,15	16,68
75	0,10	16,33
Mittel		16,65

Luft $P.\delta = 20$

P	δ	V
28,6	0,7	34,30
33,3	0,6	34,63
40,00	0,5	35,13
50,00	0,4	34,77
66,66	0,3	35,39
Mittel		34,64

Wasserstoff $P.\delta = 7,5$

P	δ	V
10	0,75	9,50
15	0,50	9,32
20	0,38	9,47
25	0,30	9,59
30	0,25	9,58
40	0,187	9,69
50	0,15	9,90
75	0,10	10,44
Mittel		9,68

Wasserstoff $P.\delta = 20$

P	δ	V
28,6	0,7	19,12
33,33	0,6	19,25
40,00	0,5	19,43
50,00	0,4	19,43
66,66	0,3	20,00
Mittel		19,45

Kohlensäure $P.\delta = 7,5$

P	δ	V
12,5	0,6	16,45
15,0	0,5	16,48
20,0	0,38	17,02
25,0	0,30	17,92
30,0	0,25	17,79
40,0	0,187	18,33
50,0	0,15	17,77
75,0	0,10	17,21
Mittel		17,37

Kohlensäure $P.\delta = 20$

P	δ	V
33,33	0,6	33,03
40,00	0,5	32,86
50,00	0,4	33,46
66,66	0,3	34,11
Mittel		33,37

Die Uebereinstimmung ist für Luft und Wasserstoff sehr gut, für Kohlensäure zwar nicht ganz so gut, aber doch unverkennbar. Es ergaben sich nämlich bei diesem Gase etwas grössere Werthe von V , wenn in dem Product $\delta.P$ das δ sehr kleine Werthe hat. Ein Grund hierfür wird später angegeben

werden. Doch sind die Abweichungen auch in Kohlensäure so gering, dass ich für alle drei Gase folgende Beziehung aufstellen kann:

Für dasselbe Medium ist das Product $P \cdot \delta$ aus Druck und Funkenstrecke die für das Entladungspotential massgebende Grösse. Daraus folgt, dass die zwei verschiedenartigen Curven, von welchen wir oben gesagt haben, dass sie die gleiche Form besitzen, bei geeigneter Wahl der Maassstäbe sogar congruent werden. Aus der Tabelle für Luft z. B. kann man die zwei Curven, welche sich fortsetzen von dem Werthe:

$$V = 4,32 \text{ für } \delta = 0,1 \text{ cm, } P = 10 \text{ cm}$$

leicht ablesen. Man gelangt immer zu gleichen Werthen von V , ob man die Funkenstrecke 0,1 cm vermehrt, oder den Druck um 10 cm, indem man im ersten Fall den Druck constant gleich 10 cm lässt und im zweiten Fall die Funkenstrecke constant gleich 0,1 cm.

Da das Entladungspotential nur von dem Producte $P \cdot \delta$ abhängt, habe ich aus den Tabellen in der oben angegebenen Weise für verschiedene Werthe von diesem Product die zugehörigen Werthe von V berechnet und gelange so zu einer neuen Zusammenstellung. Statt des Druckes P ist die ihm proportionale Dichte λ des Gases eingeführt nach der Formel:

$$\lambda = \frac{d}{1 + 0,00367t} \frac{P}{76},$$

in welcher d die Dichte des Gases bei 0° und 76 cm Quecksilber bezogen auf Wasser von 4° bedeutet. d hat die Werthe für:

Luft 0,001293, Wasserstoff 0,0,895, Kohlensäure 0,001965.

Die Temperatur t des Gases war bei den Messungen durchschnittlich 20° C. P bedeutet den Gasdruck in cm Quecksilber von 0°. Dann ist λ die Dichte des Gases bezogen auf Wasser von 4° C bei der Temperatur t und dem Gasdruck P cm Quecksilber von 0°.

Ich gebe in den folgenden drei Tabellen die berechneten Werthe an: In der ersten Spalte befinden sich die mit 10^5 multiplicirten Werthe $\delta \cdot \lambda$, in der zweiten die Mittel aus den zugehörigen Werthen von V .

Die Abhängigkeit des Potentials V von dem Producte $\lambda \cdot \delta$:

$\delta \cdot P$	Luft		Wasserstoff		Kohlensäure	
	$\lambda \cdot \delta \cdot 10^5$	V	$\lambda \cdot \delta \cdot 10^5$	V	$\lambda \cdot \delta \cdot 10^5$	V
0,2	0,3171	2,23	0,02195	1,52	0,4820	2,91
0,4	0,6342	2,79	0,04390	1,89	0,9640	3,70
0,6	0,9513	3,32	0,06585	2,20	1,446	4,27
0,8	1,269	3,82	0,08780	2,43	1,928	4,83
1,0	1,585	4,42	0,1097	2,82	2,410	5,33
1,2	1,903	4,96	0,1317	3,13	2,892	5,79
1,5	2,379	5,66	0,1646	3,51	3,615	6,46
2,0	3,171	6,73	0,2195	4,09	4,820	7,57
2,5	3,965	7,81	0,2743	4,65	6,025	8,61
3,0	4,758	8,84	0,3293	5,23	7,230	9,68
3,5	5,551	9,81	0,3842	5,76	8,435	10,65
4,0	6,342	10,72	0,4390	6,28	9,640	11,56
4,5	7,137	11,68	0,4939	6,84	10,845	12,43
5,0	7,930	12,48	0,5488	7,29	12,05	13,27
5,5	8,724	13,31	0,6037	7,80	13,26	14,06
6,0	9,513	14,17	0,6585	8,27	14,46	14,81
6,5	10,31	14,89	0,7133	8,75	15,66	15,57
7,0	11,10	15,79	0,7682	9,19	16,87	16,34
7,5	11,90	16,65	0,8232	9,68	18,08	17,37
8,0	12,69	17,44	0,8780	9,96	19,28	17,92
9,0	14,27	19,01	0,9878	10,86	21,69	19,36
10,0	15,85	20,54	1,097	11,69	24,10	20,66
12,0	19,08	23,50	1,317	13,32	28,92	23,31
15,0	23,79	27,89	1,646	15,69	36,15	27,27
20,0	31,71	34,64	2,195	19,45	48,20	33,37
25,0	39,65	41,54	2,743	23,09	60,25	39,19
30,0	47,58	48,16	3,293	26,68	72,30	45,09
35,0	55,51	54,36	3,842	30,18	84,35	51,07
42,0	66,60	62,49	4,609	34,75	101,2	59,09
45,0	71,37	66,16	4,989	36,71	108,5	62,35

In Fig. 3 sind die entsprechenden Curven construiert, indem ich als Abscissen die Werthe $P \cdot \delta$, als Ordinaten in $\frac{1}{2}$ so grossem Maassstabe die zugehörigen Werthe von V aufgetragen habe.

Die physikalische Bedeutung der gefundenen Beziehung ist folgende: Sei die kürzeste Entfernung der Electroden δ und die Dichte des Gases zwischen den Electroden λ , so ist das zur disruptiven Entladung erforderliche Potential nur abhängig von dem Product $\lambda \cdot \delta$. Sei nach Maxwell¹⁾ die zwischen den Electroden befindliche Schicht des Mediums mit einem bestimmten Widerstande gegen die electriche Entladung behaftet,

1) Maxwell, Electr. u. Magn. § 57.

und heisse derselbe, welcher bei dem Entladungspotentiale durch einen Funken durchbrochen wird, die „electric strength“ dieser Schicht, dann findet diese Grösse ihr Maass in dem Entladungspotentiale. Die electricische Festigkeit der Schicht ist demnach nur abhängig von dem Producte $\lambda \cdot \delta$. Die Bedingung, dass dies Product denselben Zahlenwerth beibehalten soll, sagt aus, dass auf der kürzesten Entfernung zwischen den Electroden, z. B. innerhalb der die nächsten Electrodenpunkte verbindenden Kraftröhre, die Anzahl der Molecüle die gleiche bleibe. Ein Wachsen von λ hat ein Abnehmen von δ und damit eine Verminderung des mittleren Abstandes der Molecüle längs δ zur Folge, wenn ihre Anzahl dieselbe bleiben soll. Es folgt:

Das Entladungspotential und damit die electricische Festigkeit der Zwischenschicht ist nur abhängig von der Anzahl und nicht von den mittleren Abständen der Molecüle in derselben. Oder: Die Schlagweite (bei demselben Potential) ist proportional den mittleren Weglängen der Molecüle in der Zwischenschicht.¹⁾

Diese Beziehung ist durch meine Versuche zunächst nur für constante Temperatur nachzuweisen; indess ergibt sich unter Hinzuziehung der in neuester Zeit von P. Cardani²⁾ gefundenen Thatsache, dass das Entladungspotential dasselbe bleibt, wenn man die Luft zwischen den Electroden bei constant bleibendem Volumen bis 300° C erhitzt, dass die electricische Festigkeit der Zwischenschicht auch unabhängig ist von der relativen Geschwindigkeit der Gasmolecüle gegen einander und nur allein durch ihre Anzahl bedingt ist.

Vergleicht man schliesslich noch die für das Entladungspotential in den drei verschiedenen Gasen bei sonstiger gleicher Anordnung gefundenen Werthe, so ist Folgendes zu bemerken: Die Curven für Luft und Wasserstoff verlaufen fast ähnlich; diejenigen für Kohlensäure schneiden die entsprechenden für Luft, und zwar sowohl diejenigen, welche das Potential in seiner Abhängigkeit vom Druck oder der Funkenstrecke darstellen, als

1) Abgesehen von dem geringen Einfluss der Temperatur auf die mittleren Weglängen gilt dieser Satz unabhängig von einer eventuellen Temperaturänderung.

2) Cardani, Rend. della R. Acc. dei Lincei. 6. p. 44—57. 1888.

diejenigen, in welchen das Potential V von dem Producte $\delta.P$ abhängt.

Wenn die Potentialdifferenz V_G , welche in einem Gase G von bestimmtem Zustand einen Funken von angegebener Länge hervorbringt, als Maass für die electricische Festigkeit dieser Gasschicht gelten kann, so auch ferner das Verhältniss dieser Potentialdifferenz V_G zu derjenigen V_L , welche unter übrigens gleichen Verhältnissen den Funken in Luft erzeugt, also V_G/V_L , als Maass der „specifischen electricischen Festigkeit“ verglichen mit Luft. In der folgenden Tabelle sind einige Werthe von V_H/V_L und V_{CO_2}/V_L für Wasserstoff und Kohlensäure zusammengestellt, wie sie sich für verschiedene Drucke und Funkenstrecken aus den Tabellen ergeben. Die oberen Zahlen jeder Rubrik geben V_H/V_L , die unteren V_{CO_2}/V_L . In einer zweiten Tabelle finden sich, aus der betreffenden Tabelle berechnet, die specifischen electricischen Festigkeiten von Wasserstoff und Kohlensäure bei verschiedenen Werthen von $P.\delta$ oder bei verschiedener Anzahl der zwischen den Electroden befindlichen Molecüle.

Spec. el. Festigkeit von Wasserstoff und Kohlensäure bei verschiedenen Werthen von $P.\delta$

$P.\delta$	Spec. el. Stärken	
	Wasserst.	Kohlens.
0,2	0,682	1,31
1,0	0,638	1,21
1,5	0,620	1,14
3,0	0,592	1,10
4,0	0,586	1,08
5,0	0,584	1,06
6,0	0,584	1,05
7,0	0,582	1,04
8,0	0,571	1,03
9,0	0,570	1,02
10	0,569	1,01
15	0,563	0,978
20	0,561	0,963
25	0,556	0,944
30	0,554	0,937
35	0,555	0,939
42	0,556	0,946
45	0,555	0,942

Specifische electricische Festigkeit von Wasserstoff und Kohlensäure bei verschiedenen Funkenstrecken und Drucken.

P in cm Q.	$\delta=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
4	0,733	0,639	0,670	0,590	0,587	0,628	0,589	0,601
	1,28	1,26	1,20	1,14	1,09	1,04		
	0,781	0,631	0,623	0,578	0,571	0,590	0,591	0,596
8	1,34	1,19	1,12	1,07	1,06	1,04		
	0,653	0,595	0,579	0,564	0,564	0,575	0,577	0,604
	1,18	1,12	1,06	1,00	0,996	0,975		
15	0,597	0,568	0,564	0,564	0,559	0,559	0,560	0,581
	1,15	1,11	1,05	1,00	0,968	0,959		
	0,587	0,567	0,562	0,552	0,556	0,551	0,558	
25	1,13	1,07	1,02	0,970	0,942	0,953		
	0,608	0,571	0,567	0,553	0,551	0,556	0,556	
	1,13	1,06	0,988	0,965	0,935	0,944		
35	0,649	0,572	0,560	0,559	0,552	0,556	0,556	
	1,11	1,01	0,979	0,946	0,927	0,946		
	0,652	0,591	0,564	0,558	0,554	0,558	0,555	
45	1,08	1,01	0,965	0,941	0,926	0,946		
	0,639	0,578	0,560	0,553	0,548	0,555		
	1,05	0,988	0,962	0,930	0,910	0,940		

Für Wasserstoff zeigt sich ein sehr geringes Abnehmen der specifischen electrischen Festigkeit mit wachsenden Funkenstrecken oder Drucken. Für Funkenstrecken über 0,3 cm und Drucke über 30 cm ist sie als constant zu betrachten, und zwar gleich 0,555. Für Kohlensäure dagegen findet eine bedeutendere Abnahme sowohl mit wachsenden Funkenstrecken, als Drucken statt. Die specifische electrische Festigkeit nimmt für dieses Gas von 1,37 bis 0,910 ab, und zwar mit ziemlicher Regelmässigkeit

Messungen über das Entladungspotential in Wasserstoff und Kohlensäure liegen abgesehen von denjenigen Faraday's vor von Baille¹⁾ und G. A. Liebig, indessen nur für Atmosphärendruck. Die Electroden Liebig's waren Kugelcalotten von 9 cm Krümmungsradius. Die aus seinen Zahlen berechneten specifischen electrischen Festigkeiten sind in folgender Tabelle angegeben. Die Baille'schen Werthe (für den Radius 1,5 cm) stimmen besonders in Kohlensäure gar nicht mehr mit den meinigen; doch sagt er selbst, dass er bei diesem Gas grosse Schwankungen in den Beobachtungsergebnissen gehabt hat, z. B. Werthe von 63,5 bis 35,6 für ein und dieselbe Grösse. Ich führe auch seine Werthe für die specifische electrische Festigkeit an. Für Wasserstoff sind die Zahlen von Baille kleiner, als die von mir erhaltenen, aber constant, diejenigen von Liebig grösser, aber nicht constant. Für Kohlensäure zeigen alle Werthe die Abnahme mit wachsender Funkenstrecke, und die Liebig'schen stimmen besser mit den meinen, als die Baille'schen.

Die folgende Tabelle gilt für 75 cm Quecksilberdruck.

Specifische electrische Festigkeit.

δ cm	Wasserstoff			Kohlensäure		
	Baille	Liebig	Paschen	Baille	Liebig	Paschen
0,1	0,49	0,873	0,639	1,67	1,20	1,05
0,2	0,49	0,787	0,578	1,24	1,16	0,988
0,3	0,50	0,753	0,560	0,94	1,07	0,962
0,4	0,50	0,704	0,553	0,76	1,03	0,930
0,5	0,50	0,670	0,548		0,994	0,910
0,6		0,656	0,555		0,974	0,940

1) Baille, Ann. de chim. et de phys. (5) 29. p. 187. 1883.

Bei der Funkenlänge 0,5 cm und Atmosphärendruck hat Macfarlane für V_{co_2}/V_L gefunden 0,95, Faraday 0,92, sodass mein Werth 0,91 mit diesen besser stimmt, als mit denjenigen von Liebig und Baille.

Schluss. — Die electrostatische Kraft im Diëlectricum wäre:

$$R = \frac{V}{\delta} (1 + \epsilon),$$

wö ϵ eine von der Gestalt des Electrodenystems abhängige Correctionsgrösse von um so geringerem Betrage bedeutet, je grösser der Kugelradius, und je kleiner die Entfernung δ ist. Die auf die Flächeneinheit ausgeübte „Spannung“ p drückt sich aus durch:

$$p = \frac{R^2}{8\pi}.$$

Aus den Tabellen ergibt sich unter Vernachlässigung von ϵ , dass R und p mit wachsenden Funkenstrecken erst schnell, dann langsam abnehmen. Für kleine δ hat R eine beträchtliche Grösse. Andere Beobachter, z. B. Thomson und Macfarlane, welche fast ebene Platten als Electroden benutzten und ϵ vernachlässigen durften, haben dies Resultat bereits gefunden und die Vermuthung aufgestellt, dass diese Kraft R für sehr grosse Funkenstrecken constant wird. Als Erklärung für die beträchtlichen Werthe von R bei sehr kleinen Funkenstrecken macht Maxwell¹⁾ unter anderem folgende Annahme: Die an der Oberfläche der Electroden condensirten Gasschichten stossen bei sehr kleinem Abstände δ aneinander und bilden in Folge dessen eine Schicht von grösserer Dichte, also nach früheren Auseinandersetzungen grösserer electricischer Festigkeit. Wenn diese Annahme richtig ist, müsste ein Gas, welches eine dichtere Oberflächenschicht bildet, als die Luft, für kleinere Funkenstrecken eine bedeutendere Zunahme der electricischen Festigkeit aufweisen, als die Luft. Die Kohlensäure ist nun ein solches Gas. Sie wird von porösen Körpern in weit grösserer Menge absorbirt, als z. B. Wasserstoff, und bildet, wie alle leichter condensirbaren Gase, eine weit dichtere Ad-

1) Maxwell, Electr. und Magn. I. Uebers. v. Weinstein. 1883. § 57.

häsionsschicht an glatten Oberflächen, als die Luft, weshalb auch die Moser'schen Hauchbilder am deutlichsten in einer Kohlensäureatmosphäre wurden. Aus meinen Potentialwerthen folgt nun, dass das Entladungspotential und die electrostatische Kraft R für kleine Funkenstrecken in Kohlensäure allerdings grösser sind, als in Luft, während die Zahlen bei grösseren δ sogar noch kleiner ausfallen, als in Luft. Ferner war bereits oben darauf aufmerksam gemacht, dass in Kohlensäure bei gleichem Zahlenwerthe des Productes $P.\delta$ nicht so constante Werthe für das Entladungspotential erhalten werden, wie in Wasserstoff und Luft, sondern etwas grössere, wenn δ sehr klein ist. Auch erhielt Liebig, welcher als Electroden fast ebene Platten benutzte, also Schichten von grösserer Breite, als Baille und ich, bei kleinen Funkenstrecken für V_{CO_2}/V_L noch grössere Werthe.

Dass die Oberflächenschicht bei ihrer im Verhältniss zu den angewandten kleinsten Funkenstrecken (0,1 cm) noch sehr geringen Dicke einen solchen Einfluss habe, dass sie allein als Grund des Zunehmens der specifischen electrischen Festigkeit mit abnehmender Funkenstrecke anzusehen ist, möchte ich nicht behaupten. Es findet ja nach den Tabellen bei den grössten Funkenstrecken auch ein Zunehmen derselben mit abnehmendem Drucke statt. Ob diese Grösse demnach überhaupt als eine Constante anzusehen ist, lasse ich dahingestellt.

Schliesslich sei es mir gestattet, den Herrn Professoren Kundt und F. Kohlrausch, sowie Herrn Dr. Czermak meinen verbindlichsten Dank für das der Arbeit gewidmete Interesse auszusprechen.

Erklärung zu Fig. 1.

In der Figur bedeutet B die Leydener Batterie, W die Potentialwage, H die Holtz'sche Maschine, R das Righi'sche Reflexionselectrometer, F das Fernrohr mit Scala, T die Transmission zur Drehung der Holtz'schen Maschine, A die Vorrichtung zum Ableiten der geladenen Theile zur Erde, E die zur Gasleitung führenden Drähte, D die isolirten Kupferdrähte, V Luftpumpenteller, Glasglocke und Funkenmikrometer, G ein Galvanoskop, K ein Daniell, L die Luftpumpe, X die Trocken- und Filtrirapparate für die Gase, Q Quecksilbernäpfchen, M das Manometer, I das Inductorium nebst Telephon.

**V. Ueber electriche Ströme, entstanden durch elastische Deformation;
von Ferdinand Braun.**

(Aus den Sitzungsber. d. königl. preuss. Acad. d. Wiss. zu Berlin.
phys.-math. Cl., vom 19. Juli 1888; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Erste Mittheilung.)

1. Allgemeine Betrachtungen, die ich früher mitgetheilt habe, veranlassten mich, nach electricen Strömen zu suchen, welche durch Druckänderungen in den Contactstellen metallischer Leiter auftreten. Bei dieser Gelegenheit fiel es mir auf, dass durch rasches Biegen von mässig dicken Metalldrähten, deren Enden zu einem Thermomultiplicator führten, die Magnetnadel desselben abgelenkt wurde. Es wirken hier mehrere Umstände, welche Veranlassung zu einer solchen Ablenkung sein könnten: Bewegung der Drahtenden in Luftschichten anderer Temperatur, erdmagnetische Induction, Erwärmen beim Biegen. Wie ich in Wiedemann's Galvanismus¹⁾ fand, sind Ströme bei solchen Vorgängen auch schon beobachtet worden²⁾; sie werden von G. Wiedemann als Thermostrome gedeutet, was für eine Anzahl der Versuche Volpicelli's sicher zutrifft. Nach meinen später mitzutheilenden Beobachtungen glaube ich, dass die von den genannten Beobachtern gefundenen Wirkungen vielfach auch auf erdmagnetischer Induction beruhen.

2. Combinationen verschiedener Versuche schienen mir aber dafür zu sprechen, dass in den von mir beobachteten Wirkungen auch Effecte von seither noch nicht genau bekanntem Ursprung sich verstecken möchten, und veranlassten mich, verschiedenes Material zu prüfen. Besonders grosse Wirkungen fand ich bei Nickeldrähten. Die Nadel des Spiegelmultiplicators wich bei starkem Biegen eines geraden 1,3 mm dicken Drahtes um 7 bis 14 Scalenth. nach der einen Seite, ebensoviel nach der anderen Seite, wenn der Draht wieder gerade gebogen wurde. Die Erscheinungen waren aber sehr unbestimmt und nicht unter eine Regel zu fassen;

1) G. Wiedemann, *Galvanismus* (2. Aufl.). 1. p. 863.

2) Sullivan, *Phil. Mag.* (3) 27. p. 261. 1845. Volpicelli, *Compt. rend.* 74. p. 44. 1872.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVII.

es war kein Zusammenhang der Richtung des entstehenden Stromes mit dem Sinne der Gestaltsänderung erkennbar. Ich suchte daher nach einer Versuchsform, welche dieser Bedingung genügt, womöglich auch stärkere Wirkungen liefert und sie bequemer verfolgen lässt. Gerade Drähte von 1 bis 2 m Länge geben bei Aenderung der Spannung um ± 10 kg nicht $\frac{1}{10}$ Scalentheil Ablenkung. Wickelt man dagegen einen oder einige Meter Draht zu einer Spirale von etwa 25 mm Weite und verbindet die Enden mit einem Multiplicator grosser Empfindlichkeit, so zeigt die Nadel beim Ausziehen der Spule um etwa 1 bis 2 cm einen Stromstoss in einer gewissen Richtung an; lässt man, nachdem die Nadel in Ruhe gekommen ist, die Spirale wieder in ihre ursprüngliche Form zurückkehren, so entsteht ein gleich starker Stromimpuls nach der anderen Seite. Spannt man an und ab im Tempo der Nadel-schwingungen, so lässt sich ihre Bewegung in bekannter Weise vergrössern und leicht bis zu ± 50 Scalentheile und darüber bringen. Auf- und Abwickeln einer Spule (also Bewegungen, wie sie beim Aufziehen oder dem freiwilligen Abrollen einer Uhrfeder entstehen) geben keinen Strom.

3. Man könnte an einen Zusammenhang mit den magnetischen Eigenschaften des Nickels denken; indessen zeigen gleiche Spiralen aus Eisendraht eine viel kleinere Wirkung. Auch erdmagnetische Induction kann nicht die Ursache sein — denn, schaltet man die Spule in der entgegengesetzten Richtung in den Galvanometerkreis, so kehrt sich auch der Sinn der Nadelbewegung um. Man könnte denken, in den Windungen der Spirale circulirten schon von Anfang an schwache Ströme, und die beobachteten seien nur die Folge gegenseitiger Induction; — schickt man aber von vornherein einen Strom durch die Spule (indem man einfach die Contactstelle mit dem Leitungsdraht durch die Hand erwärmt), so bleibt der beim Ausziehen entstehende Strom nach Richtung und Grösse ungeändert, welches auch die Richtung des constanten, die Spule durchfliessenden Stromes ist. Inductionsströme dagegen, welche der relativen Bewegung der Stromkreise ihre Entstehung verdanken, müssten sich mit der Richtung des constanten Stromes umkehren.

4. Räthselhaft bleibt, wie bei einer solchen Spule eine

Richtung bevorzugt sein kann. Es schien mir nur die Annahme übrig zu bleiben, dass die Richtung, in welcher der Draht bei seiner Herstellung das Zieheisen passiert hat, massgebend sei. Bei diesem Vorgang gleiten infolge der inneren Zähigkeit Cylinder an coaxialen Cylindern vorüber, wie in einer strömenden Flüssigkeit, und Punkte, welche vorher auf einer zur Axe senkrechten Ebene lagen, werden nach dem Ziehen eine kuppenförmige Fläche bilden, wie die leuchtenden Schichten in einer Geissler'schen Röhre. Diese Zugrichtung könnte daher von Einfluss sein. Der Versuch hat diese Voraussicht thatsächlich bestätigt. Wurde eine Nickelspirale, welche die Erscheinung gut zeigte, ausgeglüht, so war der Effect verschwunden. Liess man sie den Drahtzug senkrecht zum magnetischen Meridian in einer gemerkten Richtung passiren, wickelte sie wieder zu einer Spirale und schaltete sie in den Multiplicatorkreis, so gab Ausziehen einen Strom, welcher in der Spirale gegen die Richtung, in welcher der Draht durch das Zieheisen gegangen war, floss. In der wieder ausgeglühten Spirale war kein Strom mehr bei Deformation nachweisbar; zog man den Draht aber durch das Zieheisen in der zur gemerkten entgegengesetzten Richtung, so war der Effect wieder da, und der Strom ging jetzt bei Verlängerung der Spirale gegen diese neue Zugrichtung. Es ist mir unter allen seither untersuchten Spiralen, bei denen die Richtung, in welcher der Draht gezogen war, bekannt war, keine Ausnahme von diesem Satze vorgekommen, vorausgesetzt, dass sie vorher stark (bis nahe zur Weissgluth) erhitzt und, bei wiederholtem Ziehen, stets in der gleichen Richtung und ostwestlicher Lage durch das Zielloch gegangen waren.

5. Aus einer Spule von Nickeldraht, die so lange geglüht war, bis sie keinen bemerkenswerthen Strom mehr gab, zog ich einen langen Draht, zerschnitt denselben in mehrere gleiche Stücke von etwa Meterlänge, bemerkte an jedem derselben die Zugrichtung und wickelte aus dem ersten Stück eine rechts gewundene, aus dem zweiten eine links gewundene und so fort. Dann zeigte sich, dass der Strom, welcher bei einer Verlängerung der Spulen entsteht, bei den rechts gewundenen gegen die Richtung ging, in welcher der Draht

das Zieheisen passirt hatte; bei den links gewundenen ging er umgekehrt mit der Zugrichtung. Rechts und links gewundene Spiralen verhalten sich also entgegengesetzt. Daraus erklärt sich, warum bei An- und Abspannen eines geraden Drahtes kein Effect zu beobachten ist.

6. Ich erlaube mir, für diese Ströme den Namen Deformationsströme vorzuschlagen. Der beim Ausziehen auftretende Strom soll Dilatationsstrom, der andere Contractionsstrom genannt werden. Die Richtung, in welcher der Draht das Loch passirt hat, will ich kurz die (positive) Axe des Drahtes nennen. Bei Nickel geht der Dilatationsstrom in rechts gewundenen Spiralen gegen die Axe; solche Stoffe sollen negative heissen.

Ertheilt man dem Nickeldraht eine longitudinale Magnetisirung der Art, dass am gezogenen Ende ein Südpol entsteht, so werden die Wirkungen dadurch verstärkt.

In diamagnetischen Metallen habe ich Deformationsströme bisher nicht mit Sicherheit nachweisen können. In Eisen und Stahl scheinen sie vorhanden zu sein, aber ungleich schwächer als in Nickel. Es kommen dort Nebenwirkungen hinzu, welche die einfachen Erscheinungen trüben; auf diese werde ich in einem zweiten Aufsatze eingehen. Ich werde daselbst auch den Nachweis führen, dass die hier beschriebenen Ströme nicht aus bekannten Erscheinungen magnet-electrischer Induction erklärbar sind.

7. Die Höhe der Schraubengänge der Spiralen ist (innerhalb gewisser, aber sehr weiter Grenzen) ohne wesentliche Bedeutung. Liegen die Windungen eng zusammen, und gibt Ausziehen negativen Strom, so entsteht bei der nachherigen freiwilligen Contraction der Spirale positiver Strom. Sind die Windungen in der natürlichen Gestalt der Spule schon durch Zwischenräume von mehreren Millimetern getrennt, so gibt Nähern der Windungen durch eine äussere Kraft denselben Effect, wie wenn diese Bewegung durch die Eigenelasticität der Spule ausgeführt wird. Man kann kurz sagen: Verkürzung der Spule gibt bei rechts gewundenen Nickelspiralen stets positiven, Verlängerung negativen Effect.

Man überzeugt sich leicht, dass caet. par. die in Bewegung gesetzte Electricitätsmenge jedenfalls in erster An-

näherung proportional ist der Verlängerung. Ebenso, dass sie bei gleicher Deformation der einzelnen Windungen im Verhältniss der Zahl der deformirten Windungen steht. Man braucht nur eine Anzahl derselben ruhen zu lassen und die anderen auszuziehen.

Solche electromotorische Spulen lassen sich wie galvanische Elemente neben- und hintereinander combiniren, und ihre Wirkungen lassen sich damit jedenfalls so steigern, dass man selbst für rohe Instrumente gut nachweisbare Ströme erhält.

Da, soweit ich sehe, nicht anzunehmen ist, dass derjenige Theil der mechanischen Deformationsarbeit, welcher zur Entstehung electrischer Energie Veranlassung gibt, vorher die Energieform der Wärme durchmacht (im Gegentheil eine solche Voraussetzung der Grösse weiter unten besprochener Wirkungen sogar zu widersprechen scheint), so ist ein directer und damit vollständiger Umsatz der mechanischen in electrische Energie anzunehmen. Insofern könnte die Erzeugung der Ströme sogar ökonomisch sein. Den Inductionsströmen gegenüber sind sie vielleicht im Nachtheil, weil durch innere Reibung immer mechanische Arbeit verloren geht.

8. Um einen Vergleich der Intensität der Deformationsströme mit den durch Induction hervorgebrachten zu ermöglichen, diene die folgende Angabe. Eine Nickelspule aus 1,3 mm starkem Draht hatte auf eine Länge von 8 cm 24 Windungen von je 2,5 cm Durchmesser. Zog man sie um 1,7 cm aus und liess sie dann wieder in ihre Gleichgewichtslage zurückschnellen, so konnte die Galvanometernadel durch Multiplication auf ± 30 Scalenth. Schwingungsbogen gebracht werden. Es wurde nun coaxial in die Nickelspule ein Solenoid aus Kupferdraht gelegt, welches auf eine Länge von 15,5 cm 90 Windungen enthielt; sein Durchmesser war 1,5 cm. Man schloss und öffnete in dem Solenoid einen constanten Strom und bestimmte die Stärke des constanten Stromes, welcher in der Nickelspule die gleiche Electricitätsmenge inducirte, die man vorher durch Deformationsströme erhalten hatte. Diese Stromstärke ergab sich zu 5,5 Ampères. — Für mein Galvanometer war 1 Scalenth. = $1,5 \cdot 10^{-6}$ Amp.; die einfache Schwingungsdauer betrug

2 Sec. Bei anderen Versuchen war $1 \text{ Scalenth.} = 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ Amp.}$; die einfache Schwingungsdauer $= 4 \text{ Sec.}$

9. Taucht man eine der beschriebenen Spulen rasch, aber ohne sie dabei zu deformiren, in erwärmtes Petroleum, so entsteht ein kurz andauernder Strom. Bringt man, nachdem derselbe abgelaufen ist, die Spule in ein Petroleumbad von Zimmertemperatur zurück, so entsteht ein gleich starker Strom in entgegengesetzter Richtung. Rasche Erwärmung gibt denselben Effect wie Ausziehen, rasche Abkühlung wie Contraction. Wird eine Spule nur theilweise, etwa mit der linken Hälfte der Windungen eingetaucht, so entsteht ein schwächerer Strom; taucht man dann auch die andere ein, so entsteht ein weiterer Strom in gleicher Richtung wie der erste. Ob man links oder rechts zuerst eintaucht, ist ganz gleichgültig. Ebenso verhält es sich, wenn man zuerst die Windungen nur bis zur Hälfte einsenkt und nachher erst ganz. Es können dies also keine „secundären“ Thermoströme sein.

Wichtig ist es aber (und dieser Umstand allein macht bei Nickel Schwierigkeiten), dass der Draht homogen ist, d. h. das bei dauerndem Verweilen der Spule in dem Bade höherer Temperatur kein constanter Thermostrom auftritt. Da nun zwischen den beiden aus dem Bade herausragenden Enden der Nickelspule ein Draht von etwa 2 m Länge liegt, so kann es nicht befremden, wenn diese Stellen sich öfters wie thermoelectrisch heterogene Körper verhalten. Dann werden aber, zumal bei einer schlecht gedämpften und langsam schwingenden Magnetnadel, die Bewegungen derselben so complicirt werden, dass sie kaum noch zu deuten sind. Bei einem thermoelectrisch homogenen Drahte dagegen sind die Erscheinungen ganz bestimmt; die Ströme kehren sich um, wenn man eine Rechtsspule in eine Linksspule umwickelt, und umgekehrt; z. B. gab eine Spirale (Nr. 1.; Länge 9 cm; $21\frac{1}{2}$ Windungen von 2,5 cm Durchmesser; Draht = 1,3 mm Durchmesser; Widerstand = 0,2 S.-E.) bei einer Längenänderung von 3,2 cm den Dilatationsstrom -41 , den Contractionsstrom $+42$. Bei Temperaturänderung von 30 bis 88° gab sie als Erwärmungsstrom: -27 , -33 , -31 ; als Abkühlungsstrom $+30$, $+34$, $+25$. Die Spule war dabei

rechts gewickelt. — In eine Linksspule verwandelt, gab sie (die Dimensionen und die aufgerollte Drahtlänge waren etwas anders), ebenso wie vorher in den Stromkreis geschaltet, den Dilatationsstrom +26, Contractionsstrom -26. Erwärmungsstrom +27, Abkühlungsstrom -25. — Eine andere Spule von ähnlichen Dimensionen wurde erst als Linksspule geprüft, dann zu einer Rechts- und nachher wieder zu einer Linksspule gewickelt. Sie gab als:

	Linksspule	Rechtsspule	Linksspule
Dilatationsstrom . . .	+ 61	- 50	+ 40
Contractionsstrom . . .	- 62	+ 55	- 40
Erwärmungsstrom . . .	+ 57	- 53	+ 24
Abkühlungsstrom . . .	- 57	+ 54	- 24

Diese Erwärmungs- und Abkühlungsströme stehen zu den Dilatations- und Contractionsströmen genau in derselben gegenseitigen Beziehung, welche die Herren Curie für pyroelectrische und Deformationsladung bei vielen hemimorphen Krystallen gefunden haben.

10. Die Analogie mit den pyroelectrischen Erscheinungen ist so in die Augen springend, dass man sich fragen muss, ob eine Reciprocität zwischen electricchem Strom und mechanischer Deformation besteht. Falls eine solche vorhanden ist, so muss nach dem Princip der autostatistischen Systeme¹⁾ ein Strom, welcher in der Richtung des Dilatationsstromes fliesst, Contraction bewirken und umgekehrt. Die Beobachtung bestätigt diesen Schluss. An die unterste Windung einer vertical gehaltenen Spirale von 3 mm dicken Draht, welche zwölf Windungen von 2,8 cm Durchmesser auf eine Länge von 6 cm enthielt, war ein kleines Metallstäbchen gelöthet und die Spirale am oberen Ende eingeklemmt; das untere bewegliche Ende tauchte in Quecksilber. Auf das kleine Stäbchen wurde ein horizontal liegendes Mikroskop mit Ocularmikrometer eingestellt. Man leitete den Strom eines grossen Bunsenelementes hindurch. In der That fand bei der einen Stromrichtung Dilatation, bei der anderen Contraction statt, und zwar genau dem Sinne des obigen Principes entsprechend. Die Bewegung war hier nur klein; für die eine Stromrichtung +2 Scalenth., für die andere -1 Sca-

1) Braun, Wied. Ann. 33. p 337. 1888.

lenth. (1 Scalenth. etwa 0,01 mm), aber deutlich sichtbar. Ein Einfluss der Erwärmung war nicht bemerkbar; die Bewegung entstand momentan, und das Stäbchen blieb dann ruhig stehen. Electrodynamische Anziehung und Erwärmung könnten nie eine mit der Stromrichtung wechselnde Bewegung geben. Die Wirkung des Erdmagnetismus auf das freie Spulenende konnte durch einen untergelegten Magnetstab compensirt werden; sie war unmerklich klein, ausserdem würde sie die eingetretene und allein entscheidende Dilatation der Spule (nach der gewählten Lage derselben) verkleinert haben.

Eine andere Spirale aus dünnerem Draht (1,3 mm), ebenso untersucht, gab mehr als ± 10 Scsth. ersten Ausschlag. Bei dieser dünneren Spule war ein Einfluss der Stromwärme (Intensität = 7,5 Amp.) bemerkbar, daher wurde nur der erste Ausschlag beobachtet. Die Bewegung dieser Spule und der Sinn derselben sind schon mit blossen Auge zu sehen. Wie zu erwarten, verhalten sich auch hier rechts und links gewundene Spulen verschieden, aber stets ist die Gegenseitigkeit der drei Beziehungen gewahrt. Kupfer- und Messingspulen zeigten nur Contraction.

11. Man wird auf die Frage geführt, ob hier auch Verschiedenheiten der Leitungsfähigkeit je nach der Stromrichtung vorliegen. Dahin zielende Versuche haben mir keinen Einfluss ergeben. Der Widerstand ändert sich für schwache Ströme (0,1 bis 0,05 Amp. pro qmm Querschnitt) mit der Stromrichtung höchstens um $\frac{1}{600}$, ich glaube sogar, wenn überhaupt, höchstens um $\frac{1}{3600}$ seines Werthes. Ich will jedoch nicht in Abrede stellen, dass nicht vielleicht kleine Unterschiede bestehen können. In der That wäre es sonderbar, wenn der Strom eine jedenfalls der ersten Potenz seiner Intensität proportionale mechanische Aenderung hervorbrächte, die sich nicht auch im Widerstand aussprechen sollte.

Immerhin wäre es nicht ohne Analogie, dass das electrische Verhalten eines Körpers nach verschiedenen Richtungen mit seinem sonstigen nicht parallel geht. Dielectrica z. B. zeigen im electrischen Felde optische Doppelbrechung; diese lässt sich sogar, wie Röntgen gezeigt hat, noch bei destillirtem Wasser nachweisen. Es ist also ohne Frage auch eine vom Strom durchflossene Salzlösung optisch nicht

mehr isotrop. Dagegen bleibt sie es für den electricischen Widerstand, ebenso wie die Dielectricitätsconstante keinen Unterschied parallel und senkrecht zu den Kraftlinien zeigen kann. Eine einfache Ueberlegung führt zu der Nothwendigkeit dieses Resultates. Wäre es nämlich nicht der Fall, so müsste Folgendes eintreten. Man denke sich auf einer Niveaufläche des statischen oder des Stromfeldes zwei Electroden angebracht und diesen durch Ladung gleichfalls einen Potentialunterschied ertheilt. Aenderte nun die Ladung der Feldelectroden die Potentialdifferenz der Niveauelectroden, so würden, da dieser Einfluss ein gegenseitiger sein muss, alle Ladungen im einen oder anderen Sinne sich fortwährend ändern — was offenbar in der Natur nicht eintritt.

12. Dass für grössere Stromstärken aber der Widerstand der Nickelspiralen, wenn auch wenig, mit der Richtung wechseln muss, geht daraus hervor, dass Ausziehen der Spulen den Widerstand etwas vergrössert. Beim Abspannen geht er wieder auf seinen Anfangswerth zurück. Die Aenderungen, welche ich beobachtete, waren etwa $\frac{1}{3}$ Proc. Aus den oben mitgetheilten Thatsachen folgt in Verbindung mit dieser Widerstandsänderung, dass jedenfalls bei einer frei beweglichen (belasteten) Spule der Widerstand nicht von der Stromstärke unabhängig sein kann, vielmehr bei constanter Temperatur sich der ersten Potenz derselben proportional ändern muss. Er wird damit von der Stromrichtung abhängig.

13. Aendert man bei gleicher Dicke und Länge des Drahtes die Weite der Spulen oder die Ganghöhe der Schrauben über ein gewisses Maass, so ändern sich auch die Effecte. Immer aber bleiben, soweit die seither mehr qualitativen Versuche einen Schluss gestatten, Deformationsstrom, Erwärmungsstrom und Deformation durch den Strom einander proportional.

14. Während ein Nickeldraht durch das Zieheisen geht, treten kräftige Ströme in ihm auf; sie werden besonders intensiv, wenn er bereits mehrere Löcher passirt hat. Ein Durchziehen um 10 cm kann dann schon einen Ausschlag von 600 bis 800 ScLth. bewirken. Nach meinen seitherigen Erfahrungen fliessen diese Ströme stets gegen die Zugrichtung. Sie verhalten sich also wie der Dilatationsstrom in

rechts gewundenen Spiralen. Als ich aber eine links gewundene Spirale so lange erhitzt hatte, dass sie nur noch geringe Effecte gab, sie dann streckte und so durch das-Eisen ziehen liess, dass ein Strom in der Zugrichtung hätte entstehen müssen, falls man ihn als Dilatations- oder Erwärmungsstrom auffassen wollte, so floss der beobachtete Strom doch gegen die Zugrichtung.

15. Die Unterscheidung zwischen Rechts- und Linksspulen, welche ich seither gemacht habe, lässt sich umgehen, indem man beide aus dem gleichen Falle ableitet und damit die allgemeinste Fassung für sämtliche Thatsachen erhält. Man denke sich eine flache Spirale (wie eine Uhrfeder) gewickelt und diese in der Weise deformirt, dass man etwa das äussere Ende festhält und das innere aus der Windungsebene herausbewegt; je nachdem man die Bewegung im einen oder anderen Sinne ausführt, entsteht eine conische Rechts- oder Linksspule. Auch für diese gelten alle seitherigen Sätze. Bewegungen des inneren Endes, welche im Raume immer nach derselben Richtung erfolgen, geben auch immer Strom in derselben Richtung. Daraus lässt sich eine der Ampère'schen Regel ähnliche Elementarregel ableiten. Auf ihre einfachste Form werde ich später kommen.

16. Die mitgetheilten Thatsachen scheinen mir, auch wenn man sich von einem Erklärungsversuche vollständig fern hält, Interesse zu bieten. — Die beschriebenen Ströme erinnern an diejenigen, welche im tetanisirten Muskel auftreten.

Für die wissenschaftliche Anwendung und für die Technik werden sie Vortheile bieten können. Eine vom Strom durchflossene Nickelspirale gibt durch ihre axiale Verlängerung direct Grösse und Richtung des sie durchfliessenden Stromes an; an beiden Enden befestigt, wird sie sich in ihrer Mitte verhältnissmässig stark durchbiegen. Eine rechts und eine links gewundene Spule, welche vertical herabhängen und einen horizontalen Querstab tragen, müssen denselben, wenn sie hintereinander vom gleichen Strome durchflossen werden, drehen, ohne dass die Stromwärme einen Einfluss haben kann. — In den Kreis eines stromanzeigenden Apparates geschaltet, gestattet eine Nickelspirale, rasche Aenderungen ihrer Spannung oder Temperatur an entfernten Stellen automatisch

anzuzeigen. Die Deformationsströme und die ihnen reciproke Erscheinung lassen sich voraussichtlich für die electrische Uebertragung von Schallwellen oder von Schwingungen grösserer Amplitude benutzen, und für das Radiophon wird eine dünne Nickelspule eine wirksame galvanische Zelle sein.

**VI. Ueber Deformationsströme;
insbesondere die Frage, ob dieselben aus magnetischen Eigenschaften erklärbar sind;
von Ferdinand Braun.**

(Aus den Sitzungsber. d. königl. preuss. Acad. d. Wiss. zu Berlin.
vom 26. Juli 1888; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Zweite Mittheilung.)

1. In meinem ersten Aufsätze habe ich eine Reihe von Thatsachen mitgetheilt. Es fragt sich, ob dieselben aus anderen, bereits bekannten abgeleitet werden können. Ich will im Folgenden dasjenige zusammenstellen, was am bequemsten zur Beantwortung dienen kann.

Die Erscheinungen, welche ich früher beschrieb, habe ich bisher nur an magnetisirbaren Materialien auffinden können; am stärksten zeigen sie sich bei Nickel; wahrscheinlich sind sie auch in Eisen und Stahl vorhanden. In schwach magnetisirbaren Körpern (wie Neusilber) oder diamagnetischen Metallen ist es mir nicht gelungen, neben dem Strom, welcher durch die kaum ganz ausschliessbare erdmagnetische Induction entsteht, noch Deformationsströme nachzuweisen; treten sie auch in ihnen auf, so sind sie nach Versuchen, die ich hier übergehe, mindestens 100 mal schwächer als in Nickel. Dieser Umstand, sowie der weitere, dass man durch künstliche Magnetisirung die Grösse der Effecte ändern kann, legt den Gedanken nahe, die Beobachtungen aus magnetischer Induction zu erklären. Insbesondere wird man an die bekannten Untersuchungen von G. Wiedemann über den gegenseitigen Zusammenhang von Torsion und Magnetismus, sowie die weitgehenden Analogien zwischen dem magnetischen und mechanischen Verhalten erinnert.

2. Wickelt man aus einem hart gezogenen Nickeldraht

eine Spule, so wird dieselbe im allgemeinen bei An- und Abspannen Ströme liefern. Durch wiederholtes, namentlich durch sehr heftiges Glühen und langsames oder rasches Abkühlen (Ablöschen in Wasser) kann man den Deformationsstrom ganz oder bis auf einen sehr geringen Theil verschwinden machen. Zieht man den Draht nach dieser Behandlung wieder in ostwestlicher Richtung hart, so zeigt nun eine aus ihm hergestellte Rechts- oder Linkspule die früher beschriebenen Ströme; in einer Rechtsspule fließt der Dilatationsstrom gegen die Zugrichtung — womit alles Weitere gegeben ist. Der Draht ist aber nach meinen Erfahrungen dann auch immer magnetisch geworden, nämlich das zuerst durchgezogene Ende zu einem Südpol. Ob hierbei die kaum zu umgehenden Einflüsse von magnetischem Werkzeug oder sonstige locale magnetische Wirkungen mitgespielt haben, lasse ich unentschieden. Es ist mir nicht wahrscheinlich; denn ich fand am gezogenen Ende einen Südpol auch unter Bedingungen, wo man umgekehrt das Auftreten eines Nordpols an demselben hätte erwarten sollen; desgleichen, wenn ich den Draht horizontal und möglichst senkrecht zum magnetischen Meridian durch Holz zog und nur mit Holz- oder Messingwerkzeugen fasste. Doch enthalte ich mich eines Urtheils. Durch wiederholtes Ziehen wird diese Magnetisirung häufig verstärkt, bisweilen auch geschwächt.

Magnetisirt man nun einen Nickeldraht künstlich so, dass die beim Ziehen entstandene Magnetisirung verstärkt wird, so nehmen damit auch die Deformationsströme zu. Schwächt man die Magnetisirung oder kehrt sie um, so nehmen die Deformationsströme ab und können ihre Richtung wechseln. Doch tritt letzteres mit Sicherheit nur ein, wenn man eine gewisse permanente Magnetisirung überschritten hat, und es ist keineswegs gesagt, dass der Deformationsstrom sich umkehrt mit der Magnetisirung. Daher entstehen begreiflicher Weise complicirte Erscheinungen, deren Detail vorerst ohne Interesse ist. Man kann Spulen haben, bei welchen der Einfluss der Zugrichtung noch denjenigen der Magnetisirung überwiegt und umgekehrt, sowie alle Zwischenstufen: schwach magnetische mit starkem Deformationsstrom und stark magnetische mit schwachem Strom. Endlich nahe-

zu gleich starke Ströme und sehr verschiedene magnetische Momente; letzteres kann z. B. bei der gleichen Spule durch abwechselnd gerichtete Magnetisirung im Verhältniss von 6:1 geändert werden, ohne dass am Strom eine wesentliche Aenderung einträte.

Wenn man eine Spule nur so stark ausgeglüht hat, dass sie noch schwachen Deformationsstrom gibt; wenn man dann den Draht in der zur ersten Zugrichtung entgegengesetzten Richtung zieht, so kann nach dem ersten neuen Ziehen noch die ältere Zugrichtung für die Stromrichtung bestimmend sein. Diese Thatsache hat nichts Auffallendes, sondern in Erscheinungen der Uebereinanderlagerung elastischer Nachwirkungen und verwandten wohlbekannte Analoga. Diese Einzelheiten seien hier nur gelegentlich berührt. Ich fasse das Resultat, welches mir nach allmählich zahlreichen Erfahrungen sicher zu stehen scheint, in folgender Weise zusammen.

Stellt man sich aus einem vorher gut ausgeglühten Nickeldraht einen harten her durch horizontales Ziehen in ostwestlicher Richtung und magnetisirt ihn noch ausserdem möglichst gleichmässig in der Weise, dass das ausgezogene Ende magnetischer Südpol (das zuletzt durch den Drahtzug gegangene also Nordpol) ist, so zeigt ein solcher Draht die früher ausführlich beschriebenen Erscheinungen. — Was ich dort *Axe* nannte, ist also die Zugrichtung, resp. gleichzeitig die Richtung vom Nord- zum Südpol durch den Draht.

Die Magnetisirung kann auch geschehen, wenn der Draht schon zu einer Spirale gewickelt ist. Es ist aber schwer, einen Nickeldraht gleichmässig zu magnetisiren. Ich habe kaum einen Draht oder eine Spule auf ihr magnetisches Moment geprüft, bei welcher beide Enden entgegengesetzt gleiche Wirkungen auf eine Magnetnadel ausgeübt hätten. Es bilden sich also meist Folgepunkte. Doch bringen innerhalb weiter Grenzen diese Unregelmässigkeiten keine bemerkenswerthen Störungen vor. Wenn sie aber sehr erheblich sind oder künstlich besonders gross gemacht werden, so können zwei Theile derselben Spule sich entgegengesetzt verhalten. Drähte, welche in einzelnen Theilen schon ohne künstliche Magnetisirung solche Verschiedenheiten zeigen, sind ausserordentlich schwer durch Glühen davon zu befreien.

Es scheint, als ob dann im Material eine besonders unhomogene Stelle sich befände, an der sich auch mit Vorliebe ein Folgepunkt bildet.

3. Ehe ich weiter gehe, fasse ich zusammen, wie verschiedene Deformationen wirken.

Durch An- und Abspannen eines geraden 2 m langen Nickeldrahtes erhielt ich, wie schon früher erwähnt, keinen für mein Galvanometer messbaren Strom. Ebenso wenig durch Torsion um 180, 360 und mehrmals 360° eines ebenso langen, mehr oder weniger gespannten Drahtes.¹⁾ Wurden aus diesen Drähten aber Spulen gewickelt, so lieferten sie starke Deformationsströme. Wird eine solche Spirale, mag sie gestreckt oder flach gewickelt sein, auf- oder abgerollt, wie eine Uhrfeder, welche man aufzieht oder ablaufen lässt, so entstehen keine Ströme; die schwachen Bewegungen der Multiplicatornadel sind den kaum zu vermeidenden Verlängerungen und Verkürzungen der Höhe einzelner Schraubengänge zuzuschreiben und werden um so geringer, je mehr man diese unbeabsichtigten Bewegungen ausschliesst. Man wird des Resultates am sichersten, wenn man die umgekehrte Erscheinung zu Hülfe nimmt und die Gestaltsänderung untersucht, welche ein Strom in der Spule hervorruft. Man hänge eine Spirale vertical, indem man sie am oberen Ende einklemmt, biege das untere Ende zu einem geraden Drahte, welcher vertical absteigt und in Quecksilber taucht. Man befestige an diesem oder an der untersten Windung einen Spiegel, die spiegelnde Ebene vertical. Ein Strom, welcher durch die Spirale geht und erhebliche Contractionen und Dilatationen ($\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{10}$) mm hervorruft, bewirkt keine Lagen-

1) Bei meinen ersten Versuchen fand ich keinen Strom durch Torsion. Ich habe mich neuerdings überzeugt, dass ich denselben übersehen habe wegen des folgenden sonderbaren Umstandes: Eine kleine Torsion bringt Strom hervor; ebenso erhält man eine Reihe von wesentlich gleich starken Stromimpulsen, wenn man immer gleiche Drillungen nach massigen Pausen (von wenigen Secunden) sich folgen lässt. Gibt man dem Draht aber rasch eine grosse Torsion, so erhält man nicht die Summe der Ströme, welche man erwarten sollte, sondern einen sehr schwachen Ausschlag. Bei den ungünstigen örtlichen Verhältnissen, unter welchen ich damals die Beobachtungen anstellen musste, habe ich die Impulse, welche die Magnetnadel erhielt, Störungen zugeschrieben und aus dem Ausbleiben der Ausschläge bei grossen raschen Drehungen mich für berechtigt gehalten zu schliessen, dass durch Torsion kein Strom entstehe. — Für die Deutung der hier beschriebenen Erscheinungen ist dies übrigens ohne Belang.

änderung der Spiegelnormale, weder in einer horizontalen, noch in einer verticalen Ebene. Die geringen Verschiebungen (0,2 bis 1,5 mm an einer 2 m entfernten Scala), welche man mit Fernrohr und Scala beobachtet, sind nur die unvermeidlicher Begleiter der Contractionen selber. *Als wirksam bleibt also nur eine Deformation, welche den schon in einer Ebene gebogenen Draht nochmals in einer zur ersten senkrechten Ebene verbiegt.*

4. Der zur Erklärung nächstgelegene Gedanke ist nun folgender. Die Drahtspule hat von vornherein schon zwei Magnetpole. Lässt man durch dieselbe einen Strom fließen, so wird nach der Ampère'schen Regel auf die Pole eine Kraft ausgeübt, welche der ersten Potenz der Stromstärke proportional ist und daher, je nach der Stromrichtung, in einer Contraction oder Dilatation der Spule bestehen wird; zu ihr gesellt sich die dem Quadrate der Stromintensität proportionale electrodynamische Wirkung. Von letzterer werde abgesehen. Nach den früher mitgetheilten Regeln geht nun in einer Rechtsspule der Dilatationsstrom gegen die Zugrichtung, d. h. von dem Süd- nach dem Nordpol in der Spirale. Ein solcher Strom bewirkt daher umgekehrt Contraction, er müsste also den Nordpol nach der Spule hin bewegen. Man überzeugt sich aber leicht, dass die Ampère'sche Regel gerade das entgegengesetzte verlangt. *Die electromagnetischen Fernwirkungen, welche die stromdurchflossene Spule auf sich selbst ausüben kann, würden also eine der beobachteten entgegengesetzte Deformation anstreben und können daher nicht zur Erklärung herangezogen werden.* Sie treten vielmehr hindernd in den Weg, und da sie somit das Bestreben haben, sich mit der ihrem Wesen nach noch unbekannten deformirenden Kraft des Stromes ins Gleichgewicht zu setzen, und daher auch eine Spule, welcher keine Eigenelasticität zukäme, infolge dieser entgegengesetzt wirkenden Kräfte eine bestimmte Gleichgewichtslage annehmen würde, so könnte man eher an eine Reciprocität zwischen beiden denken.

Ist die Bewegung der Spule, welche unter dem Einfluss des Stromes eintritt, aber nicht aus electromagnetischen Kräften zu erklären, so fällt damit natürlich auch die Möglichkeit, umgekehrt den Deformationsstrom als die zugehörige

Inductionswirkung aufzufassen. Dieser Schluss ist jedenfalls bindend, so lange man sich die Deformation, welche einen Strom erzeugt, sehr klein denkt. Da aber auch durch Belastung gestreckte Spulen sogar in quantitativ gleicher Weise auf den Strom reagiren, wie unbelastete (soweit die Genauigkeit meiner Messungen ging), so ist der Schluss auch für grössere Deformationen zulässig.

Die in meiner ersten Abhandlung angedeutete Regel (§ 15), unter der man die Deformation des Stromes und die reciproken Erscheinungen zusammenfassen kann, lautet daher einfach: *Man betrachte Zugende und Südpol als gleichbedeutend. Die Deformationen durch den Strom und die Ströme durch Deformation sind dann gerade entgegengesetzt gerichtet denjenigen, welche nach der Ampère'schen Regel (in Verbindung mit dem Lenz'schen Gesetze) auftreten müssten.*

Wenn damit der relative Sinn der beiden Wirkungen festgelegt ist, so gibt der folgende Versuch Aufschluss über das Verhältniss ihrer Grössen. Eine Spule hat, da sie selbst magnetisch ist, um sich herum ein Magnetfeld; ich will es das äussere nennen. Bei der Deformation ändert sich dieses Feld; in dem sich fortwährend ändernden Feld bewegen sich gleichzeitig die einzelnen Spulenwindungen und können Inductionswirkungen erfahren. Man lege nun neben den Nickeldraht einen von ihm isolirten, aber durch eine Umspinnung dicht mit ihm verbundenen Kupferdraht. Bei der Deformation ist der Kupferdraht bis auf eine zu vernachlässigende Grösse denselben inducirenden Kräften des äusseren Feldes unterworfen, wie der Nickeldraht. Als ein solcher Doppeldraht deformirt wurde, zeigte der Multiplicator, wenn die Nickelspirale eingeschaltet war, einen Dilatationsstrom an $= +25$ Scalentheile; wurde statt ihrer die Kupferspirale eingeschaltet, so gab der Multiplicator $-0,3$ Scsth. — eine Ablenkung, wie sie schon durch erdmagnetische Induction entsteht. Der Widerstand beider Spiralen war nahezu gleich ($0,2$ S.-E.) und klein gegen den Gesamtwiderstand der übrigen Schliessung ($1,8$ S.-E.)

Leitete man umgekehrt einen Strom durch die Nickelspirale, so zeigte dieselbe die regelmässigen, wenn auch wegen der doppelten Starrheit kleinen Deformationen; ein gleich

starker Strom, durch den Kupferdraht geleitet, bewirkte keine beobachtbare Gestaltsänderung.

5. Eine Erklärung aus den Wirkungen des äusseren Feldes ist somit ausgeschlossen. Die electromotorischen Kräfte, welche den Deformationsstrom hervorrufen, erstrecken sich (wenigstens durch das die Spirale umgebende Mittel hindurch) nicht auf grössere Entfernungen. Damit ist in guter Uebereinstimmung, dass der Deformationsstrom bei immer weiter fortgesetztem Ausziehen eines Drahtes lange Zeit keine wesentliche Aenderung erfährt, auch wenn die Ganghöhe einer Schraubenwindung schon von wenigen Millimetern bis zu 10 cm und darüber gewachsen ist.

Schwieriger wird aber die Beantwortung der Frage, ob innere Induction eine ausreichende Erklärung an die Hand gibt. Der Draht ist magnetisch; die Molecularmagnete werden Drehungen, resp. beim Erwärmen Schwächungen ihrer Momente erfahren und in der leitenden Substanz, in welche sie eingebettet sind, Inductionsströme hervorrufen.

Wir wollen uns nun die Magnetisirung eines zunächst gerade gedachten, sehr dünnen Drahtes zerlegt denken — wodurch jede gegebene Magnetisirung erschöpft wird — in eine axiale, eine radiale und eine circulare Componente. Weder eine Aenderung der axialen, noch der radialen Magnetisirung kann einen Inductionsstrom in der Richtung der Axe erzeugen. Nach dem Ergebniss des vorigen Paragraphen darf man, jedenfalls für eine qualitative und in grosser Annäherung selbst für eine quantitative Betrachtung, diesen Satz auf unseren Fall eines gebogenen Drahtes anwenden. Es bleibt somit nur noch die *circulare Magnetisirung als möglicher Erklärungsgrund übrig*.

Für diese fehlt ein directes Maass, insbesondere wenn die Magnetisirung in jedem Ring eine wirklich homogene (solenoidale) ist. Ein indirectes Maass ihrer Aenderung könnte man versucht sein, in der Aenderung des longitudinalen Momentes zu suchen. Denn wenn aus einem geschlossenen und daher nach aussen magnetisch unwirksamen Ringmagneten eine Anzahl Molecularmagnete ausscheiden, so werden diese, falls gleichzeitig, wie es ja der Fall ist, eine richtende longitudinale Kraft auf sie wirkt, sich wenigstens

theilweise in die Richtung der Axe legen und somit das longitudinale Moment vergrössern.

Diese Auffassung wird durch die Thatsachen nicht unterstützt. Der Deformationsstrom ist keineswegs der Aenderung des messbaren, d. h. longitudinalen Momentes proportional. Da diese Aenderung sich wieder aus zwei Ursachen zusammensetzen wird, nämlich 1. einer Momentänderung infolge der rein geometrischen Aenderung der Länge; 2. einer damit vielleicht verbundenen Aenderung des freien Magnetismus, so würde es nicht ganz einfach sein, verschiedene Spulen miteinander zu vergleichen. Ich beschränke mich deshalb auf Angaben, welche sich je auf dieselbe und stets in der gleichen Weise deformirte Spirale beziehen. An die Enden solcher waren Kupferdrähte gelöthet; der ganze magnetische Draht war zu einer Spirale gerollt. Würde man nämlich von demselben an den Enden noch gerade Stücke herausstehen lassen, so wäre das am Magnetometer messbare Moment schlecht definirt. Eine solche Spule war in eine Magnetisirungsspirale, welche 3×66 Windungen Kupferdraht auf 25 cm Länge besass, gelegt; der innere Durchmesser derselben war 3,5 cm; ein Strom bis zu 6,5 Ampère wurde hindurchgeschickt.

Die Spirale befand sich in erster Hauptlage in der Nähe einer mit Spiegel und Dämpfung versehenen Magnetsnadel; die electromagnetische Wirkung des Stromes war in bekannter Weise compensirt. Es wurden in relativem Maasse das magnetische Moment, resp. seine Aenderungen und die beim Deformiren entstehenden Ströme gemessen. (Die im Folgenden für das Moment angegebenen Zahlen sind die an einer 240 cm vom Spiegel des Magnets entfernten Millimeterscala abgelesenen Ablenkungen; die Mitte der Spirale befand sich 26,3 cm vom abgelenkten Magnet entfernt.)

Es ergab sich zunächst, dass die Grösse des temporären Momentes, resp. seine Aenderung für den Deformationsstrom nicht massgebend ist. Die Spule hatte 2 m Nickeldraht von 1,3 mm Durchmesser in 26 Windungen von 2,5 cm Weite; ihre Länge (sie soll die natürliche Länge heissen) war 13,5 cm. Wurde sie von dieser natürlichen Länge um 4 cm jedesmal ausgezogen, so war z. B.:

		Aenderung des Momentes	Strom
		beim Ausziehen	
Perm. Moment in nat. Länge vor Versuch	- 8	—	-20
Temp. " in nat. Länge	-30	+ 25	-27
" " ausgezogen	- 5		
Perm. " in nat. Länge	- 9	- 7	-20
" " ausgezogen	-16		

Temporäres und permanentes Moment ändern sich in verschiedener Weise; der Strom, welcher dabei entsteht, hat aber gleiche Richtung und sogar gleiche Grösse. Die Differenz von 7 Scalentheilen, welche man erhält, wenn die Nickelspirale einmal in der vom Strom (1,7 Ampère) durchflossenen und dann in der stromlosen Magnetisirungsspirale deformirt wird, rührt nämlich von Voltainduction bei Bewegung gegen die nicht ganz gleichmässig vertheilten Windungen der letzteren, wovon man sich überzeugt, wenn man man die Nickelspirale mit einer gleichen Kupferspirale vertauscht.

Es hat keinen Zweck, diese Beispiele (ich könnte leicht auffallendere anführen) zu häufen. Ebenso wenig wie die Aenderung des temporären Momentes ist die Aenderung entscheidend, welche das remanente Moment erfährt, indem es — bei Bewegung der Spule — in das permanente (welches constanten Werth erst nach einigen Deformationen annimmt) übergeht. Im Gegentheil: wollte man einfach mit den ganzen Aenderungen des Momentes rechnen, so müsste man gleichsinniger Aenderung des remanenten und des permanenten Momentes bisweilen Stromeffecte von entgegengesetztem Zeichen zuschreiben; z. B. war:

		Aenderung des Momentes	Strom
		beim Ausziehen	
Rem. Moment in natürlicher Länge . .	+ 8,6	-23,6	-14
Perm. " ausgezogen	-15		
" " in natürlicher Länge . .	- 3	-12	-16
Rem. Moment in natürlicher Länge . .	-24		
Perm. " ausgezogen	-21	+ 3	-22
" " in natürlicher Länge . .	-14		

Will man überhaupt eine Beziehung des Momentes zum Strom suchen, so glaube ich, dass eine Aussicht auf Erfolg höchstens vorhanden wäre, wenn man das temporäre und wohl auch das remanente Moment ganz von der Betrachtung ausschliesst.

Eine Stahlspirale, die schon vorher durch einen kräftigen Hufeisenmagnet magnetisirt war, wurde ebenso untersucht. Durch die benutzten Ströme konnte ihr permanenter Magnetismus von seinem Anfangswerthe 33 auf resp. 24 und 41 geändert, die Spirale aber nicht ummagnetisirt werden. Die Momentänderungen beim Deformiren bewegten sich von -3 bis -5 , der Strom von $-0,5$ bis -1 . Die Ströme sind zwar schwach, doch kann ich mit Bestimmtheit sagen, dass nicht der grössten Momentänderung der stärkste Strom zugehört.

Eine Eisenspirale, deren hartgezogener, 2 mm dicker Draht gerade gestreckt, in dieser Gestalt longitudinal magnetisirt und nachher erst zu einer Spule gewickelt war, konnte durch den Strom ummagnetisirt werden. Ich gebe einige auf sie bezügliche Zahlen; in der ersten Spalte führe ich die Stromstärken in der Magnetisirungsspule an.

	Perm. magn. Momente		Aenderung der Momente	Strom
	Nat. Länge	Ausgez.	beim Ausziehen	
Vor Vers.	— 92	— 107	— 15	— 2,8
— 3,3 Amp.	— 129	— 149	— 20	— 0,7
+ 3,3 "	— 72	— 86	— 14	— 3,6
— 6,4 "	— 198	— 228	— 30	— 2,0
+ 6,4 "	+ 21	+ 19	— 2	— 4,5

Die Zahlen zeigen deutlich, dass auch hier keine Beziehung zwischen Momentänderung und Deformationsstrom besteht.

Ob rechts und links gewundene Eisenspulen, welche permanent longitudinal in einer solchen Spule magnetisirt sind, sich entgegengesetzt verhalten, habe ich bei der Kleinheit der Effecte nicht mit Sicherheit entscheiden können.

6. Die Versuche, welche ich im letzten Paragraph beschrieb, waren veranlasst durch die unzweifelhaft feststehende Thatsache, dass im Nickel eine starke longitudinale Mag-

netisirung die Erscheinung in der früher angeführten Weise abzuändern vermag. Dem entsprechend waren die magnetisirenden Kräfte so angeordnet, dass sie möglichst rein longitudinal magnetisiren sollten. Die Beobachtungen ergeben zunächst nur das negative Resultat, dass, wenn überhaupt, so jedenfalls keine einfache Beziehung der Ströme zu den Aenderungen der magnetischen Momente besteht. Insofern enthalten sie eine Bestätigung des schon auf anderem Wege gewonnenen Resultates, dass das äussere Feld nicht die Ursache der Ströme sein könne. Sie scheinen auch in longitudinal magnetisirtem Eisen Deformationsströme anzuzeigen, welche den in Nickel beobachteten entsprechen. Doch will ich diese in der jetzigen Abhandlung nicht weiter verfolgen.

Es scheint mir vielmehr zunächst wichtiger, die *Wirkungen zu studiren, welche eine möglichst rein circulare Magnetisirung hervorruft*. Denn erst ein Vergleich mit den davon herrührenden Effecten wird eine Entscheidung über die in erster Linie interessirende Frage ermöglichen, ob man die im Nickel auftretenden Ströme als eine neue Erscheinung aufzufassen hat, oder ob sie gleichfalls aus circularer Magnetisirung erklärbar sind.

Von diesem Gesichtspunkte aus sind die Bedingungen, welche in den vorigen Versuchen hergestellt waren, offenbar nicht die günstigsten. Circulare Magnetisirung, welche allein durch Induction Ströme von der Beschaffenheit der in Rede stehenden geben kann, erhält man bekanntlich, wenn man durch einen Eisendraht einen kräftigen Strom hindurchschickt. Wenn es auch nicht möglich ist, nur circulare oder nur longitudinale Magnetisirung herbeizuführen, so gelingt es doch verhältnissmässig leicht, die Stromeffecte circularer Magnetisirung in Eisen kennen zu lernen unter Benutzung der folgenden Thatsache. Magnetisirt man Eisen unter Verhältnissen, welche für das Entstehen longitudinaler Magnetisirung möglichst günstig sind, so gibt dasselbe, selbst nach starken permanenten Magnetisirungen, Ströme, welche nur sehr schwach sind im Verhältniss zu den bei Nickel auftretenden. Die Angaben des vorigen Paragraphen geben dazu einige Belege. Leitet man aber durch Eisen einen

Strom von grosser Dichtigkeit (4 Ampère/qmm) hindurch, sodass man für das Auftreten circularer Magnetisirung günstige Bedingungen schafft, so zeigen die Eisenspulen zwar gleichfalls nachher ein longitudinales Moment. Die Ströme aber, welche bei Gestalts- und Temperaturänderung in einer solchen circular magnetisirten Spirale auftreten, übertreffen die in einer bis zu demselben äusserlich messbaren Momente longitudinal magnetisirten vielleicht um das Zehnfache; sie kommen den in gleich grossen Nickelspiralen auftretenden an Intensität näher (bis zu etwa $\frac{1}{3}$ derselben); sie unterscheiden sich aber von den letzteren in charakteristischer Weise.

Ehe ich sie beschreibe, scheint es mir zweckmässig, wenn auch nur zu vorübergehendem Gebrauche, einen weiteren Namen einzuführen. Ein Strom, welcher dadurch entsteht, dass eine Spirale gegen ihre Elasticitätskraft zusammengedrückt wird, soll Compressionsstrom genannt werden.

Lässt man durch eine Eisenspule einen starken Strom gehen, unterbricht denselben, schaltet die Spule in einen Galvanometerkreis und deformirt sie, so erhält man Ströme. Der Dilatationsstrom hat eine gewisse Richtung; die gleiche besitzt aber auch der Compressionsstrom (im Gegensatz zum Verhalten von Nickel). Ausziehen und Zusammendrücken geben also die gleichen Effecte. — Die Ströme, welche die ersten Deformationen nach dem Durchleiten des Stromes hervorbringen, sind stärker als die späteren. — Führt man eine Deformation in einem gewissen Sinne aus und beobachtet dabei einen gewissen Strom, so gibt die gleiche Deformation, im entgegengesetzten Sinne vollzogen, anfangs nicht den gleichen Strom. Erst nach mehrfachem Hin- und Hergehen (Dilatiren und Comprimiren) tritt dies ein; die Spirale ist dann in einen permanenten Zustand gekommen. Man erkennt dabei deutlich, wie zwei Ströme sich übereinander lagern — ein stärkerer den Abfall des remanenten in den permanenten Magnetismus begleitender und ein schwächerer, von Anfang an schon vorhandener, den man als constant annehmen kann, und welcher den Aenderungen des permanenten Magnetismus entspricht. Durch diese Auffassung bekommen die Beobachtungen eine übersichtliche Deutung, welche sich mir immer bewährt hat.

Diese Erscheinungen lassen sich bei Annahme einer circularen Magnetisirung in der folgenden Weise erklären. Leitet man einen Strom hindurch in einer gewissen Richtung $a \rightarrow b$, so entsteht circular Magnetisirung, Deformirt man, nach Unterbrechung des Stromes, so wird die circular Magnetisirung theilweise rückgängig, und es muss daher ein gleichgerichteter Inductionsstrom von $a \rightarrow b$ entstehen, wie es die Beobachtung thatsächlich zeigt. Die ersten stärkeren Ströme sind diejenigen, welche man im Anschluss an eine von Hrn. G. Wiedemann gewählte Bezeichnungsweise Erschütterungsströme nennen kann.

Eine Rechtsspule (Draht 1,2 mm dick), durch welche man einen Strom von 4,2 Ampère/qmm geleitet hatte in derjenigen Richtung, welche in der oberen Reihe angeführt ist, gab z. B.:

Strom war durchgegangen in			
Richtung $a \rightarrow b$		Richtung $b \rightarrow a$	
1. Dilatat. +50 ($a \rightarrow b$)	1. Compr. +28	1. Dilatat. -60	1. Compr. -15
3. " + 4	10. " + 7	6. " - 3	10. " - 2

Man müsste also voraussetzen, dass jede Deformation aus der natürlichen Länge eine anfangs grösstentheils permanente, später nur temporäre Abnahme der circularen Magnetisirung bewirkt. Die entstehenden Ströme entsprechen dieser einfachen und natürlichen Annahme; sie haben dieselbe Richtung wie derjenige Strom, welcher die circular Magnetisirung schuf, und kehren sich daher mit derselben um. Dies gilt ganz unabhängig von der Windungsrichtung der Spirale.

7. Das beschriebene Verhalten ist aber nur der Specialfall eines allgemeineren. Dehnt man eine Spule aus hart gezogenem Eisendraht über ihre natürliche Länge aus, leitet einen Strom hindurch, öffnet ihn wieder, während sie noch ausgedehnt ist, und lässt sie dann erst in ihre natürliche Gestalt zurückgehen, so ist ihr Verhalten dem einer Nickelspirale viel ähnlicher geworden. Jede Verkürzung der Spule (ob Contraction oder Compression) gibt jetzt Strom nach einer Richtung, jede Dilatation Strom in der entgegengesetzten. Doch gilt dies nur so lange, als die Länge der Spule kleiner

ist, als diejenige, bei welcher man den magnetisirenden Strom hindurchfliessen liess. Ich will diese als Magnetisirungslänge bezeichnen. Ueberschreitet man die Magnetisirungslänge, so kehren die Ströme, welche gleichsinniger Dimensionenänderung zugehören, ihr Vorzeichen um.

Nur mit diesem allgemeinsten Fall will ich mich jetzt beschäftigen. Zur Erklärung dieser Ströme reicht wieder die Annahme aus, dass bei der Magnetisirungslänge die circulare Magnetisirung ihren maximalen Betrag besitzt, allgemein wahrscheinlich, dass ein System magnetischer Moleküle, welche durch elastische Kräfte miteinander verbunden sind, und welches bei einer bestimmten Gleichgewichtslage magnetisirt ist, bei jeder elastischen Deformation an der durch die magnetisirende Kraft gewonnenen magnetischen Ordnung verliert. In dieser Form hat der Satz jedenfalls in der Art, wie elastische Nachwirkungen durch elastische Deformationen geändert werden, correspondirende Thatfachen, welche sich auch aus plausiblen Annahmen auf theoretischem Wege ableiten lassen. Es erweckt sogar den Anschein, als ob er aus ganz allgemeinen Ueberlegungen sich ergeben müsse. Wie dem auch sei — die Hypothese genügt jedenfalls den Thatfachen. Macht man die Länge kleiner oder grösser als die Magnetisirungslänge, so entsteht ein Strom, welcher dem ursprünglich magnetisirenden gleich gerichtet ist. Dieser Satz umfasst alles. Lässt man einen Strom durch eine Spule, sie sei rechts oder links gewunden, während sie die (Magnetisirungs-)Länge L hat, in der Richtung $a \rightarrow b$ gehen, so gibt Abspannen sowohl als Anspannen, wenn man von der Länge L ausgeht, Strom in Richtung $a \rightarrow b$. Sobald ein permanentes Verhalten erreicht ist, die electrischen Zustände also eindeutig durch andere, z. B. den mechanischen, definirt sind (mit anderen Worten, sobald das Princip der Erhaltung der Electricität gilt), so muss daher geben:

unterhalb		oberhalb	
der Magnetisirungslänge			
Contraction	Strom $a \rightarrow b$	Dilatation	Strom $a \rightarrow b$
Dilatation	" $b \rightarrow a$	Contraction	" $b \rightarrow a$

8. Wenn die Ströme in Eisen aber von circularer Magnetisirung herrühren, so ist betreffs des Einflusses einer Temperaturänderung Folgendes zu schliessen.

Durch Temperaturerhöhung nimmt jedenfalls die Magnetisirung ab; nun gibt zunehmende circulare Magnetisirung einen dem magnetisirenden entgegengesetzt gerichteten Strom; Erwärmung muss also gleichgerichteten geben. Abkühlung umgekehrt. Dies muss gelten, gleichgültig, ob die Spulenlänge grösser, gleich oder kleiner als die Magnetisirungslänge ist; ferner für rechts- und linksgewundene Spiralen und daher auch für gerade ausgestreckte Drähte.

In der That bestätigt dies die Beobachtung, und zwar erhält man im Vergleich zu den durch Deformation entstehenden Strömen recht starke Effecte. Eisendraht ist nach meinen Erfahrungen thermoelectrisch viel homogener als Nickeldraht, sodass die bei letzterem oft auftretenden Schwierigkeiten mir hier nicht entstanden sind. Ehe ich Strom hindurchschickte, prüfte ich, ob die Spule bei Eintauchen in heisses Petroleum einen dauernden Ausschlag am Galvanometer gab. Dies war nicht oder in einem nicht störenden Maasse der Fall; ebenso wenig nach der Einwirkung des Stromes.

Ich gebe einige Beispiele und bemerke, dass jede Spule etwa 2 m Draht von 1,2 mm Durchmesser enthielt. Die natürliche Länge war 11 cm; die Temperaturänderung etwa 50°. Der Pfeil bedeutet die Stromrichtung in der Spirale.

Fe. 20. *r* (Rechtsspule).

3 Amp. hindurch → in nat. Länge			Magnetisirend. Strom umgekehrt (←)	
Länge	Nat. Länge	3 cm länger		Nat. Länge
Erwärmen .	35 →	22 → 19 →	Erwärmen .	34 ←
Abkühlen .	32 ←	13 ← 15 ←	Abkühlen .	30 →

Fe. 20. *l* (Linksspule).

3,5 Amp. hindurch ← in nat. Länge			3,5 Amp. ← im ausge- zogenen Zustande	
Länge	Nat. Länge	3 cm länger	Magnetisirungslänge	
Erwärmen .	50 ← 44 ←	32 ←	50 ←	
Abkühlen .	56 → 44 →	31 →	45 →	

Fe. 21. I (Linksspule).

Natürliche Länge = 11 cm 5 Amp. \leftarrow bei 12 cm Länge.

Länge =	12 cm	15 cm	9 cm
Erwärmen . . .	68 \leftarrow	60 \leftarrow	62 \leftarrow
Abkühlen . . .	66 \rightarrow	57 \rightarrow	62 \rightarrow

Die Erwärmungsströme und die durch Deformation in circular magnetisirtem Eisen auftretenden stehen, was ihre Richtung betrifft, in keiner gegenseitigen Beziehung zu einander — im Gegensatz zu dem Verhalten von Nickel. In Hinsicht ihrer Grösse sind die Erwärmungsströme bei Eisen verglichen mit den durch Deformation entstehenden viel stärker als bei Nickel.

9. Stellt man mit dem beschriebenen Verhalten des circular polarisirten Eisens das Verhalten von Nickelspulen zusammen, so ergibt sich mit Bestimmtheit, dass man es mit zwei ganz verschiedenen Erscheinungen zu thun hat.

a) Wäre circulare Magnetisirung die Ursache der Ströme bei Nickel, so sollte man denken, dass man bei diesem Metall besonders leicht mittelst eines Stromes, den man hindurchschickt, die circulare Magnetisirung ändern und damit die Effecte ebenso beherrschen könnte, wie bei Eisen. Dies ist aber nicht der Fall. Ströme von der gleichen oder noch grösserer Dichtigkeit, wie diejenigen, welche das Verhalten von Eisen umkehren, bewirken bei Nickel keine bemerkenswerthe Aenderung der Stärke der Deformationsströme (während sie doch durch longitudinale Magnetisirung geändert werden kann).

b) Erwärmungs- und Abkühlungsströme, welche von Circularmagnetismus herrühren, dürfen sich nicht mit dem Sinn der Spulenwicklung umkehren. Bei Eisen hat diese auch thatsächlich keinen Einfluss, wohl aber bei Nickel. Ein gerader Nickeldraht darf keinen Erwärmungsstrom geben; ein gerader, circular magnetisirter Eisendraht muss einen geben.

c) Es ist sogar nicht möglich, eine circular magnetisirte Eisenspirale herzustellen, welche sich nur in Hinsicht auf die Deformationsströme wie ein Nickeldraht verhält. Die Magnetisirungslänge verhindert einen durchgehenden Ver-

gleich. Man könnte nun denken, durch eine passende Wahl derselben (Null oder möglichst gross) lasse sich doch eine Eisenspirale machen, welche sich einer Nickelspirale gleich verhält. Dem ist aber nicht so. Nimmt man nämlich, um die vollkommenste Analogie zu haben, auch auf die beim Stromdurchgang stets entstehende permanente longitudinale Magnetisirung des Eisens Rücksicht (s. den folgenden Paragraphen) und vergleicht eine Eisenspule, durch welche ein starker Strom gegangen war, ohne auf diese ihre Vorgeschichte zu achten, einfach nach Maassgabe von a) der zurückgebliebenen longitudinalen Magnetisirung und b) der auf die Richtung der magnetischen Axe bezogenen Richtung des Dilatationsstromes mit einer longitudinal magnetischen Nickelspule, so ergibt sich, dass eine Eisenspule oberhalb ihrer Magnetisirungslänge sich verhält wie eine Nickelspule. Bei gleicher Magnetisierungsrichtung geben sie gleich gerichteten Dilatationsstrom in gleich gewickelten Spulen. Windet man also, um die kleinste mögliche Magnetisirungslänge zu haben, eine flache Eisenspirale (Uhrfederspirale) und magnetisirt sie circular, so würde man denken können, dass diese, nun zu einer Spule ausgezogen, das Verhalten einer Nickelspirale zeige. Wenn aber der früher angegebene Satz über Magnetisirungslänge auch auf diesen speciellen Fall anwendbar ist, so ergibt sich doch ein wesentlicher Unterschied: zieht man das eine Ende der Uhrfeder aus der Windungsebene heraus, so werden bei Eisen, mag die Bewegung nach rechts oder nach links der Ebene erfolgen, Ströme von gleicher Richtung entstehen müssen; bei Nickel aber entgegengesetzte.

— Der Versuch bestätigt diesen Schluss.

Wollte man sagen, Nickel verhalte sich wie Eisen, welches gerade gestreckt und dann (also bei möglichst grosser Magnetisirungslänge) circular magnetisirt ist, so würde sich leicht ein ähnlicher Unterschied herstellen lassen, je nachdem man den geraden Draht in eine Rechts- oder Linksspule verwandelt. Der Wichtigkeit wegen habe ich auch dies geprüft und bestätigt gefunden.

Es gibt also keine Möglichkeit, eine circular magnetisirte Eisenspule herzustellen, welche alle Eigenschaften einer gleich gestalteten Nickelspirale besässe. Dies gilt, selbst wenn man

sie nur auf Deformations- oder nur auf Erwärmungsströme hin miteinander vergleicht.

10. Ich habe seither immer in Eisen, durch welches ein starker Strom gegangen war, circulare Magnetisirung vorausgesetzt. Ein directer Beweis für dieselbe existirt nicht. Nun werden Eisenspulen, durch die ein Strom hindurchgeht, auch gleichzeitig longitudinal magnetisch. Ich will, obschon durch die zuletzt erwähnten Versuche eigentlich alles erledigt ist, doch noch etwas ausführlicher auf die Frage eingehen, ob eine durchgehende Analogie zwischen Nickel- und Eisenspiralen möglich ist, wenn man sie nur auf diese (bei Eisen vom durchgegangenen Strom hergestellte) longitudinale Magnetisirung hin vergleicht.

Da die Magnetisirung, welche die Eisenspirale erhält, derjenigen gleichsinnig ist, die das äussere Feld hervorruft, so ergibt sich Folgendes. Rechts- und Linksspiralen von Eisen verhalten sich einander entgegengesetzt, wenn beide unterhalb oder beide oberhalb der Magnetisirungslänge miteinander verglichen werden, und wenn man die Richtung der Deformationsströme auf die Richtung der magnetischen Axe bezieht.

Vergleicht man sie mit gleichsinnig magnetisirten Nickelspiralen, so verhält sich unterhalb der Magnetisirungslänge eine Rechtsspule aus Eisen, wie eine Linksspule aus Nickel und vice versa. Oberhalb der Magnetisirungslänge kehrt sich die Sache wieder um, also dort verhält sich Eisen wie Nickel.

Wir finden damit neue Bestätigungen dafür, dass das äussere Feld die Erscheinungen nicht bedingt.

11. Endlich möge hier noch eine weitere Frage erledigt werden. Hr. G. Wiedemann hat in bekannten Versuchen gezeigt, dass ein Magnet, durch welchen man in Richtung seiner Axe einen Strom leitet, je nach der Richtung des Stromes eine Torsion nach links oder nach rechts annimmt. Er sagt¹⁾: „Befindet sich der Nordpol des magnetisirten Drahtes oberhalb, und durchfliesst ihn der hindurchgeleitete Strom von oben nach unten, so tordirt sich das untere freie

1) G. Wiedemann, Galvanismus 3. p. 689. 3. Aufl.

Ende desselben (von oben gesehen) in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers.“ Zur Erklärung dieser und verwandter Erscheinungen nimmt Hr. G. Wiedemann eine spiralige Anordnung der einzelnen Fasern eines derartig tordirten Drahtes an. Es liegt nahe, weiter zu schliessen, dass bei unseren Versuchen gewissermassen eine einzelne solche Spiralfaser herausgeschnitten sei, und dass diese die von uns benutzte Spule darstellt. Fragen wir, ob eine solche Vorstellung zutreffend sein kann. Im speciellen angeführten Falle wären die vorher geraden Magnetfasern in eine Rechtsspule übergegangen. Leitet man durch eine rechts gewundene Nickelspirale einen Strom vom Nordpol zum Südpol, so würde er die Spule dilatiren. Wenn eine Dilatation aber überhaupt eine Drehung des unteren, frei gedachten Endes bedingt (während das obere eingeklemmt ist), so kann diese Drehung nur in einem Aufwickeln der Spule bestehen. Dies gäbe aber eine Bewegung gegen den Sinn der Uhrzeigerdrehung (von oben gesehen). Auf Nickelspulen ist also diese Erklärung nicht anwendbar. Das Resultat ist in Uebereinstimmung damit, dass die Bewegungen bei Nickel überhaupt entgegengesetzt den aus electromagnetischen Wirkungen folgenden sind.

Auf eine Eisenspule unterhalb der Magnetisirungslänge könnte die Erklärung übertragbar sein; sie würde dagegen nicht mehr passen für eine solche oberhalb der Magnetisirungslänge.

12. Es bleibt noch eine Erscheinung zu besprechen: die starken Ströme, welche in Nickel beim Durchgang durch einen Drahtzug auftreten. Diese scheinen auf den ersten Blick ein sprechender Beweis für die Entstehung einer circularen Magnetisirung zu sein. In der That vermuthete ich anfangs einen directen Zusammenhang derselben mit den Deformations- oder Erwärmungsströmen. Dem widerspricht aber die Thatsache, dass in geraden Nickeldrähten Ströme bei Temperaturänderung nicht beobachtet werden. Ich glaube, man hat ihre Erklärung auf ganz anderem Boden zu suchen, und es ist ein rein äusserer Zusammenhang, dass ich auf dieselben bei diesen Versuchen aufmerksam wurde. Sie gehören meiner Ansicht nach zu den freilich selbst noch räthsel-

haften, aber thatsächlich längst bekannten Strömen, welche durch Aneinanderlegen eines warmen und eines kalten Drahtes vom gleichen Metall im ersten Moment entstehen. Der Nickeldraht wird beim Durchgang durch den Drahtzug sehr heiss; nach der einen Seite fällt seine Temperatur langsam, nach der anderen rasch ab. Der Strom ging stets gegen die Zugrichtung, d. h. von warm durch die Stelle, wo der Temperaturursprung liegt, nach kalt. Mit dieser Auffassung stimmt es überein, dass ich beim Anlegen eines warmen Nickeldrahtes an einen kalten stets einen ebenso gerichteten Strom erhielt, obschon ich die Stücke und ihre Formen an der Contactstelle durch Biegen in der mannigfachsten Weise variierte. Es war mir dies um so auffallender, als Nickel im übrigen, wie erwähnt, thermoelectrisch nicht sehr homogen ist.

13. In meiner ersten Abhandlung habe ich angeführt, dass der Widerstand einer Nickelspirale durch Ausziehen wächst. Für die geringfügigen Aenderungen, welche die einzelnen Volumenelemente durch die elastische Deformation dabei erleiden, ist die Zunahme auffallend gross. In circular-magnetisirtem Eisen (selbst wenn es seinen Magnetismus dabei sehr stark ändert) habe ich Widerstandsänderungen mit den verhältnissmässig rohen Beobachtungsmitteln, welche bei Nickel schon ausreichen, nicht nachweisen können. Sie sind auch dort wahrscheinlich vorhanden, aber jedenfalls viel kleiner.

14. Die im vorstehenden Aufsatz beschriebenen Versuche geben keine Erklärung der an Nickel gefundenen Erscheinungen. Sie beweisen aber, dass dieselben aus keiner wohlbekannten electromagnetischen Wirkung abgeleitet werden können; eine Anzahl weiterer Beweise für dieselbe Sache habe ich bei Seite gelassen, da die angeführten ausreichen dürften. — Man wird daher einstweilen die Fähigkeit, Deformationsströme u. s. w. zu liefern, als eine neue Eigenschaft, wenigstens des Nickels, wahrscheinlich magnetischer Stoffe überhaupt, betrachten müssen. Meiner Auffassung nach liegt die Sache so. Mechanische Kräfte, wie sie beim Durchpressen durch einen Drahtzug entstehen, versetzen Nickel in einen Zustand, der es zur Erzeugung von Deformations- und Er-

wärmungsströmen geeignet macht. Dieselbe Eigenschaft erhält es durch die „moleculare Umlagerung“, welche der Magnetismus bewirkt. In Nickel haben wir die neue Erscheinung relativ rein vor uns. Circulare Magnetisirung, welche bis zu einem gewissen Grade ähnliche Wirkungen liefern kann, ist entweder überhaupt nicht vorhanden oder so wenig störend, dass sie die Hapterscheinung nicht verdeckt. Anders in Eisen. Hier ist gerade die circulare Magnetisirung sehr störend. Die vorstehende Arbeit gibt aber Mittel an die Hand, die Deformationsströme von den durch circulare Magnetisirung hervorgerufenen Inductionswirkungen zu trennen.

Da die Erscheinungen offenbar mit der Eigenschaft der Stoffe starke magnetische Erregungen annehmen, in engem Zusammenhang stehen, so kommen wir vielleicht umgekehrt von den Deformationsströmen aus einem Aufschlusse darüber näher: worin die bei einzelnen Körpern so räthselhaft stark hervortretende Fähigkeit, magnetisch polarisierbar zu sein, eigentlich bestehen mag.

VII. *Ueber die Verwendung einer Schwefelkugel zur Demonstration singulärer Schnitte an der Strahlenfläche; von A. Schrauf.*

§ 1. Der prismatische Schwefel ist wegen seiner starken Doppelbrechung besonders geeignet für Präparate zur Demonstration charakteristischer Eigenschaften der Strahlenfläche (Wellenfläche). Die zweckmässigste Gestalt solcher Präparate ist die Kugelform. Eine derartige Form des Schliffes ist wohl ungewöhnlich und macht den Calcül durch die Verbindung der Dioptrik und Wellenlehre complicirt, allein die Kugelform liefert an den singulären Punkten der Wellenfläche so schöne objective Bilder der Strahlenquerschnitte, dass dieser praktische Vorthail den theoretischen Nachtheil weit überwiegt.

Die von mir benutzte Schwefelkugel hat einen Durchmesser von 15 mm. Ich bin der Firma Dr. Steeg und

Reuter in Homburg sehr zu Dank verpflichtet, dass sie sich der Mühe unterzog, aus einem meiner Schwefelkrystalle von Truskawice dies Präparat tadellos herzustellen. Beim Gebrauche beansprucht Schwefel grosse Sorgfalt, weil jede plötzliche Erwärmung das Präparat rissig machen würde. Auch die feine Politur des Schwefels ist sehr empfindlich und wird leicht trübe und matt. Deshalb ist es empfehlenswerth, die Schwefelkugel für die Beobachtungen frei in eine Becherhülle einzulegen, ähnlich wie die Eichelfrucht in ihrer cupula sitzt. Dies hat auch den weiteren Vortheil, dass alle Zonen frei bleiben und durch blosses Drehen der Kugel in ihrer Becherhülle eingestellt werden können. Dieser Becher darf aber nicht mehr als das untere Viertel der Kugel umfassen. Als Material für ihn empfiehlt sich ein schlechter Wärmeleiter, im Nothfalle kann ihn jeder Beobachter selbst aus schwarzem Siegelack fertigen.

Zur Controle der Beobachtungen ist die Kenntniss der optischen Constanten des Schwefels nöthig. Das Ergebniss meiner neuen Untersuchungen differirt nur unbedeutend von meinen früheren, schon 1860 veröffentlichten Angaben. Für 20°C . und Natriumlicht gilt: $\alpha = 2,2451$, $\beta = 2,0373$, $\gamma = 1,9584$, $\alpha^2 = \gamma^{-2} = 0,26072$, $\beta^2 = 0,24091$, $\epsilon^2 = \alpha^{-2} = 0,19838$. Die Elasticitätsaxe ξ ist die positive Bissectrix. Da im Folgenden theils Lage, theils Grösse der Elasticitätsaxen zu erwähnen nöthig ist, so sollen fortan mit $a\ b\ c$ die Zahlenwerthe; hingegen mit $X_a\ Y_b\ Z_c$ die Richtungen notirt werden. Es fällt somit Z_c mit der Richtung der positiven Bissectrix, X_a mit der zweiten Mittellinie zusammen. Bedeutet ferner V eine optische Axe für Wellen, also $V_1\ V_2$ den gewöhnlichen wahren Axenwinkel, S die Richtung einer Strahlenaxe, φ_i den Winkel der inneren conischen Refraction, ψ_i den Winkel der äusseren¹⁾ conischen Refraction, so gilt:

$$VZ_c = 34^{\circ}18'; \quad SZ_c = 30^{\circ}45'; \quad \varphi_i = 6^{\circ}52'; \quad \psi_i = 7^{\circ}16'.$$

1) $\alpha \gamma \operatorname{tg} \varphi_i = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \sqrt{\beta^2 - \gamma^2} = \beta^2 \operatorname{tg} \psi_i$. [Vgl. Billet, *Optique* 2. p. 557. 558.] Der Winkel der äusseren conischen Refraction ist daher bei negativen Krystallen etwas kleiner, bei positiven etwas grösser, als der Winkel der inneren conischen Refraction; doch der Unterschied beider beträgt nur Minuten.

Die Schwefelkugel kann benutzt werden zu exacten Beobachtungen mit parallelem Lichte und zur Demonstration mit convergenten Lichtstrahlen.

I. Untersuchungen im parallelen Lichte.

§ 2. Beobachtungen dieser Art erfordern nicht das directe Sonnenlicht; die gewöhnliche Gaslampe für monochromates Licht liefert genügend helle Bilder. Es empfiehlt sich, behufs Vornahme von Messungen, die Becherhülle mit Krystallkugel auf einem horizontalen Goniometer zu fixiren. Der Goniometer Fuess, Modell I, ist hierzu der tauglichste. Als Collimator ist zu verwenden das auf unendlich gestellte Einlassrohr mit einer kreisrunden Apertur (Lochblende) von 1 mm Durchmesser. Das Ocularrohr trägt die Vorstecklupe vorgeschlagen; gelegentlich wird ein Nicolkreis aufgesetzt. Zur Controle dienen die Beobachtungen mit oder ohne Nicol, mit oder ohne Lupe. Das auf unendlich eingestellte Beobachtungsfernrohr würde allein nicht die virtuellen Bilder sichtbar machen, welche durch die sphärische Form des Präparates erzeugt werden. Zu dem Zwecke muss seine Brennweite durch die Vorschlaglupe auf eine Distanz gleich dem Goniometerradius reducirt werden. Die hier zur Beobachtung gelangenden Phänomene werden nämlich sowohl durch die Kugelform des Präparates, als auch durch die Strahlenfläche bedingt. Die Einfachheit der mathematischen Discussion, welche planparallelen Präparaten genügt, ist hier nicht mehr vorhanden. Ich fand in der bisherigen Literatur keine Dioptrik doppeltbrechender Linsen, beabsichtige auch nicht, dieselbe zu liefern, und begnüge mich deshalb, die wichtigsten Sätze aus der Theorie der einfachbrechenden Linsen sinngemäss anzuwenden.

Für parallele Centralstrahlen, wie sie in der eingangs erwähnten Combination der Collimator liefert, liegt der Brennpunkt einer Kugellinse von Schwefel möglichst nahe der Austrittsfläche. Die hierfür unmittelbar passende Formel entnehme ich der Optik von Radicke (2. p. 169):

$$F = 2R \cdot (n - 1) / (2 - n),$$

worin $1/F$ die Hauptbrennweite, $1/R$ der Radius, n der Brechungsexponent ist. Radicke setzt hinzu: wenn $n = 2$,

so wird $F = \infty$, und der Brennpunkt für parallele Strahlen fällt in die hintere Fläche. Berechnet man die Brennweiten einer Schwefelkugel vom Diameter 15 mm in der Art, dass man keine Rücksicht auf die Doppelbrechung nimmt und bloß in obige Formel für n die Werthe α , β , γ einsetzt, so erhält man:

$$\frac{1}{F_{\alpha}} = -0,738 \text{ mm}; \quad \frac{1}{F_{\beta}} = -0,135 \text{ mm}; \quad \frac{1}{F_{\gamma}} = +0,163 \text{ mm}.$$

Es erzeugen also parallele Centralstrahlen, welche parallel X_a einfallen, zwei Brennpunkte (F_{α} , F_{β}), welche im Inneren der Kugel liegen. Strahlen, welche parallel Y_b oder Z_c einfallen, liefern hingegen zwei Brennpunkte, den einen innerhalb, den zweiten knapp ausserhalb der Austrittsfläche. Weil bei dieser Berechnung die Variation der Brechungsexponenten mit der Richtung vernachlässigt, und nur monochromates Licht berücksichtigt ist, sind obige Zahlen für F auch nur Annäherungswerthe. Man erkennt aber aus ihnen zur Genüge, dass die erzeugten virtuellen Bilder nicht in einem Niveau liegen. Ferner wird durch diese Zahlen von F erklärt, warum das Beobachtungsfernrohr auf Entfernungen gleich dem Goniometerradius eingestellt werden muss, denn nur so vermag es die im Brennpunkte auf der Austrittsfläche erzeugten Bilder dem Auge zu übermitteln. Ist die Kugel centirt, so liegt die Austrittsfläche etwas innerhalb der richtigen Sehweite der Lupe, welche bekanntlich auf das Centrum des Instrumentes justirt ist. Geringe Variationen in der scheinbaren Grösse der anvisirten Bilder werden daher eintreten, je nachdem Kugelmitte oder Austrittsfläche centirt ist.

Bilder, welche sich auf der Austrittsfläche der Kugel zeigen, werden vom freien Auge als verkehrte Bilder des anvisirten Gegenstandes, z. B. einer Kerzenflamme gesehen. Ich nehme hier keine Rücksicht auf den Gang des Lichtstrahles im Auge selbst. Im Beobachtungsfernrohre erscheinen diese Bilder wieder aufrecht; sie sind aber zu beziehen auf das Bild der Krystallkugel, welches im Fernrohre verkehrt gesehen wird.

§ 3. Relative Lage der doppeltgebrochenen Strahlen in den Hauptschnitten. Diese Strahlen seien der Kürze

wegen mit ω , ε bezeichnet, je nachdem sie einem Kreise oder einem elliptischen Hauptschnitte der Strahlenfläche entsprechen. Ferner sei das einfallende Licht nicht als Strahlenbündel, sondern nur als ein einziger Strahl vorausgesetzt.

Kann die Schwefelkugel nach allen Richtungen eingestellt werden, und coincidirt deren Drehungsaxe mit der Limbusaxe, dann zeigt es sich, dass für alle intermediären Stellungen trotz der Linsenform volle räumliche Trennung der doppeltgebrochenen Strahlen eintritt. Die Hauptschnitte sind daran erkennbar, dass während einer vollen Umdrehung der Kugel: ω im Centrum des Gesichtsfeldes, ε hingegen wohl in variabler Distanz von ω , aber immer im Niveau der Drehungsebene verbleibt. Nur in den Richtungen der Elasticitätsaxen fallen ω und ε zusammen, das heisst, es pflanzen sich nach derselben Richtung zwei entgegengesetzt polarisirte Strahlen fort. Dies beweist die Richtigkeit der bekannten Annahme, dass für die Richtungen der Elasticitätsaxen die Tangenten an Kreis und Ellipse der Strahlenfläche parallel sind, daher der einfallende Strahl wohl polarisirt, aber nicht räumlich zerlegt wird.

Geht man in den Hauptschnitten von der Anfangsstellung Z_c (d. h. der einfallende Strahl ist parallel der Bisectrix) durch Drehen der Krystallkugel zu den Stellungen X_a oder Y_b über, so trennen sich die Strahlen ω , ε , und ε ist weniger von der Richtung Z_c abgelenkt als ω . Es entspricht dies sowohl der bekannten Bezeichnung attractorisch für positive Krystalle, als auch der Huygens'schen Construction der Tangente an Kreis und Ellipse. Die Einrichtung des Goniometers Modell I gestattet, die angulare Differenz zwischen den Strahlen ω und ε für jeden beliebig einfallenden Strahl zu messen. Das Schema der Beobachtungen ist beispielsweise im folgenden dargestellt.

- 1) Collimator parallel dem Beobachtungsfernrohr, beide fix. Erste Kugelstellung parallel Z_c , Ablesung am Limbus 0° . Zweite Kugelstellung parallel ω ; Ablesung 35° .
- 2) Collimator wie früher. Kugel in zweiter Stellung fixirt. Beobachtungsfernrohr gedreht bis parallel ε . Limbus zeigt 28° .

Aus diesen Aufzeichnungen ergebe sich, dass ein ein-

fallender Strahl, welcher mit der Bissectrix einen Winkel von 35° [$\omega^0 - Z_c^0$] macht, beim Austritt in zwei um $7^\circ = [\Delta(\omega^0 - \epsilon^0)]$ divergirende Strahlen zerlegt ward.

Aehnlich wie bei der Doppelbrechung durch Prismen ist auch hier die angulare Differenz zwischen den Richtungen beider Strahlen [$\Delta(\omega^0 - \epsilon^0)$] variabel. ϵ entfernt sich anfangs von ω , erreicht bei gewisser Kugelstellung [d. i. bei bestimmter Neigung des einfallenden Strahles gegen die Elasticitätsaxe] sein Maximum der Deviation, um von da an sich wieder ω zu nähern. Die Function $\Delta(\omega^0 - \epsilon^0)$ besitzt daher ein Maximum, und es ist die Frage naheliegend, bei welcher Kugelstellung dieses Maximum eintritt, und welchen Maximalwerth $\Delta(\omega^0 - \epsilon^0)$ erreichen kann. Seien diese Fragen speciell für den Hauptschnitt $Z_c Y_b$ zu erörtern, so zeigt in dieser Zone die Construction der Wellenfläche den Kreis $a a$ und die Ellipse $b c$. Die Diameter b und a fallen in die Richtung Z_c . Durch zwei parallele Linien (die Tangenten an die Welle des Strahles in Luft) werden zwei Tangentialpunkte, c am Kreise und e an der Ellipse bestimmt. Die Diameter vom Centrum zu diesen Tangentialpunkten bilden mit Z_c die Winkel ω^0, ϵ^0 . Der Winkel der beiden parallelen Tangenten mit Z_c soll mit k bezeichnet werden. Es gelten¹⁾ in diesem Falle die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \omega^0 = K, \quad \operatorname{tg} \epsilon^0 = K c^2 / b^2,$$

wobei $\cotang k = K$ gesetzt ist. Als Bedingung für das Maximum gilt:

$$d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} K - \operatorname{arc} \operatorname{tg} K c^2 / b^2) = 0,$$

woraus für das Maximum der angularen Differenz $\omega^0 - \epsilon^0$ in der Zone $Y_b Z_c$ folgt:

$$\operatorname{tg} \omega^0 = b / c, \quad \operatorname{tg} \epsilon^0 = c / b.$$

1) Durch ein ähnliches Verfahren gelangt man auch indirect zur Kenntniss des Winkels ψ_e der äusseren conischen Refraction. Sei ω_s der Winkel der Strahlenaxe mit Z_c , so ist ω_s auch gleichzeitig der Winkel von der Normale am Kreisschnitt und von dem Diameter an den Tangentialpunkt der Ellipse. Die Tangente an die Ellipse macht den Winkel k , die Normale auf die Tangente den Winkel ϵ_s — mit Z_c . Dann ist:

$$\operatorname{tg} k \operatorname{tg} \omega_s = c^2 / a^2$$

$$\operatorname{tg} \epsilon_s = \cotg k = \operatorname{tg} \omega_s a^2 / c^2.$$

In diesem Falle ist $\omega_s = 30^\circ 45'$, woraus $\epsilon_s = 38^\circ 1'$ und $\psi_e = \epsilon_s - \omega_s = 7^\circ 16'$ folgt (vgl. § 2).

Die Constanten des Schwefels geben hieraus für den genannten Hauptschnitt:

$$\begin{aligned}\omega^0 &= 47^\circ 46' 41'' .6 \\ \varepsilon^0 &= 42^\circ 13' 18'' .4 \quad A(\omega^0 - \varepsilon^0) = 5^\circ 33' 23'' 2,\end{aligned}$$

für die angulare Differenz der Strahlen im Innern der Strahlenfläche und für die Neigungen der Strahlen gegen die Richtung Z_c .

Man misst aber bei der oben erwähnten Versuchsanordnung nicht den inneren Winkel A , sondern den ihm entsprechenden Winkel in Luft, also $n \sin A$; im vorliegenden Falle ist für die Richtung ε^0 zu nehmen $n = 2,1238$. Dies gibt für A in Luft $11^\circ 52'$; gemessen ward $11^\circ 40'$. Ferner ward beobachtet, dass ω^0 innerhalb der Grenzen $47^\circ - 50^\circ$ liegt. Eine genauere Bestimmung von ω^0 war unmöglich, weil ω , ε — ähnlich dem Minimum der Deviation — sich nur langsam bei Drehung der Kugel aus ihrer Maximalstellung entfernen.

§ 4. Querschnitt der austretenden Strahlen ω , ε . Im vorhergehenden Paragraphen ward nur die Lage eines Lichtpunktes erörtert, der Collimator liefert jedoch ein Strahlenbündel von messbarem Durchmesser. Würde dieses Strahlenbündel eine isotrope Kugel passiren müssen, dann wären auch die Durchschnitte der austretenden Strahlen mit der Kugelfläche Kreise. Bei einer doppelbrechenden Kugel sind aber die vom austretenden Strahle durchschnittenen Kugelteile nicht bloß als Theile einer Linse, sondern auch als Theile der Strahlenfläche wirksam. Die Contour des austretenden Strahles wird deshalb dem Schnitte eines Conus mit einem ungleichaxigen Ellipsoide vergleichbar, und ist sowohl für ω als ε eine langgestreckte Ellipse. Eine analoge Beobachtung hat, wie ich meine, zuerst Haidinger¹⁾ an planparallelem Aragonitpräparat gemacht. An einem solchen Präparate ist jedoch das Phänomen nur undeutlich zu sehen, während die Schwefelkugel die elliptischen Querschnitte mit messbarer Schärfe zeigt. Von Aragonit sagt Haidinger: „Der mehr abgelenkte Strahl bringt den Endpunkt der längeren Ellipsenaxe hervor, der weniger abgelenkte

1) Haidinger, Pogg. Ann. 96. p. 480. 1855.

den der kleineren Axe der Ellipse. Die eine Ellipse wird durch die innere Schale, die äussere durch die äussere Schale der Wellenfläche gebildet. Die Polarisation jeder derselben findet in der Richtung der grösseren Diagonalen statt.“ Diese Angabe gilt nur, wie ich hinzufüge, für eine negative Bissectrix und die durch sie gelegte Axenebene. Für die Axenebene und Bissectrix eines positiven Krystalls ist nicht die Polarisation, sondern die Schwingungsrichtung den grösseren Diametern der erwähnten elliptischen Querschnitte parallel. Dies kann mit Leichtigkeit an der Schwefelkugel geprüft werden. Ein solcher Gegensatz zwischen negativen und positiven Krystallen entspricht vollkommen ihrer Strahlenfläche. Aus letzterer ist auch das Verhältniss der beiden Ellipsendiameter zu ermitteln, wobei man weder die Linsenform, noch die Unterschiede zwischen den Brännweiten der verschiedenen Strahlen in eine Näherungsrechnung einzuführen braucht.

Im Punkte a der Coordinatenaxe Z_c treffen sich die aufeinander senkrecht stehenden Tracen der Wellenfläche: Kreis aa , Ellipse ac . Da der Querschnitt des einfallenden Strahles ein Kreis vom Diameter $2x$, der Strahl selbst parallel Z_c ist, so können für den Calcül die erwähnten Curven aa , ac in eine Ebene $Z_c X_a$ gelegt werden. In dieser Ebene sind dann die Coordinaten vom Schnittpunkte des Strahlenrandes mit der Ellipse: x, ξ ; mit dem Kreise x, z . Der Strahl tritt aus normal zur Tangente am Schnittpunkte. Sind die Centriwinkel dieser Normalen für den Kreis mit k , für die Ellipse mit η bezeichnet, so ergibt sich aus den Prämissen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 k &= x^2 / (a^2 - x^2), & \operatorname{tg}^2 \eta &= a^2 a^2 x^2 / c^2 (a^2 c^2 - a^2 x^2), \\ \operatorname{tg}^2 \eta &= \frac{a^2 (a^2 - x^2)}{c^2 (c^2 - x^2)}. \end{aligned}$$

Diesem Verhältnisse der Tangenten entspricht das gesuchte Grössenverhältniss zwischen den zwei Diametern ac des austretenden elliptisch-cylindrischen Strahles, und man kann in Annäherung setzen:

$$\lim a/c = a^2/c^2 = 1,3146.$$

Durch analogen Calcül erhält man die Diameter b, c der Strahlenellipse in der auf die optische Axenebene senkrechten Zone $Z_c Y_b$ für parallel Z_c einfallende Strahlen:

$$\lim b/c = b^2/c^2 = 1,2142.$$

Bei dieser Limitenbestimmung ist der Werth x , d. i. die Breite des Strahlenbündels vernachlässigt. Wenn aber auch x mit seinem hier geltenden Maximalwerth $x = a/15$ eingeführt würde, so hätte dies auf das Resultat nur geringen Einfluss.

Zahlreiche Messungen von $a:b:c$ bestätigten das theoretische Resultat. Für solche Beobachtungen erwies sich besonders dienlich die am Modell I von Fuess angebrachte Vorrichtung, Tangentialverschiebungen des Beobachtungsfernrohres zu messen. Die betreffende Mikrometerschraube hat einen Gang von 0,5 mm, der einer Verschiebung gleich $17' 20''$ der Limbustheilung entspricht. Diese Relation ermöglicht, Unterabtheilungen des Schraubenganges zu messen. Als Mittel dieser Beobachtungsreihen, ausgeführt im Sommer und Herbst, ergab sich:

$b = 1,250$	$c = 1,10$	$b/c = 1,136 \text{ mm}$	berechnet 1,21 mm,
$b = 1,175$	$c = 1,00$	$b/c = 1,175$	
$a = 1,375$	$c = 1,050$	$a/c = 1,309 \text{ mm}$	berechnet 1,31 mm.
$a = 1,200$	$c = 0,915$	$a/c = 1,311$	

Die relativen Zahlenverhältnisse stimmen in befriedigender Weise mit der Rechnung. Die einzelnen Beobachtungsreihen geben nicht gleiche absolute Werthe für die Bildgrößen vom Querschnitte des austretenden Strahles, indem diese von der willkürlichen und nicht immer identen Distanz zwischen Kugel, Fernrohr, Auge abhängen. In einem gewissen Sinne sind also diese verschiedenen Bildgrößen vergleichbar den Gesichtswinkeln für einen Gegenstand bei myopischem oder hypermetropischem Auge.

§ 5. Conische Refraction. Singuläre Punkte der Strahlenfläche. Der Ring¹⁾ der conischen Refraction kann an einer Schwefelkugel mit freiem Auge gesehen²⁾ werden. An der benutzten Kugel (15 mm Diameter) habe ich direct mit einem Maassstabe den Durchmesser des Lichtringes mit freiem Auge gemessen und für ihn 2 mm gefunden. Diese Zahl, bezogen auf die Eintrittsstelle des Strahles, entspricht

1) $\varphi_i = 7,1^\circ$ vgl. Schrauf, Wien. Ber. 41. p. 804. 1860.

2) Bereits von Boltzmann angegeben in seiner Abhandlung Wien. Ber. 70. II. p. 344. 1874.

einer Apertur von $7^{\circ} 37'$, wenig verschieden von dem gerechneten φ_i .

Bei einem kugelförmigen Präparate beschränkt die sphärische Gestalt ohnehin den Ort des einfallenden Strahles. Es ist deshalb nicht nöthig, die Einfallsfläche mit durchbohrtem Stanniol zu verkleben, wie dies bei planplanen Platten geschehen muss. Die Versuche zeigen sogar, dass eine solche Blende die Ringe nur undeutlich macht. Deshalb kann man die Krystallkugel vollkommen frei lassen, bei guter Justirung derselben in der optischen Axenebene alle vier Ringe der conischen Refraction nacheinander beobachten und deren angulare Distanzen messen. Zu diesem Zwecke genügt es, bei fixen und parallelen Fernrohren die Kugel mit dem Limbus zu drehen.

Seien $V_1 V_2$ die Orte der zwei optischen Wellenaxen; $K_1 K_2$ und deren Antipoden $K'_1 K'_2$ die Orte der inneren conischen Refraction, so gilt der Theorie zufolge: $\angle V_1 V_2 = \angle K_1 K_2$. Theoretisch ist man daher im Stande, auf einem Umwege mittelst der conischen Refraction einen Axenwinkel in Luft zu messen, wenn die optischen Axen bei planplanen Präparaten auch nicht mehr in Luft austreten. Diesen Dienst im Interesse exacter Forschung sollte die Schwefelkugel mir leisten, und sie ward auch vornehmlich zu diesem Zwecke hergestellt. Aber Schwefel besitzt wegen seiner starken Brechung ein zu grosses Reactionsfeld für die conische Ringbildung, als dass der Winkel $K_1 K_2$ scharf messbar wäre. Der gerechnete Werth $Z_c K_1$ ist 35° , wenn man jene Kugelstellung mit 0° bezeichnet, bei welcher der einfallende Strahl parallel der Bissectrix Z_c ist. Die Messungen ergaben nun, dass die Ringbildung bereits nach einer Drehung der Kugel um $29\frac{1}{2}^{\circ}$ sichtbar wird und erst verschwindet, wenn die Drehung der Kugel aus der Nullstellung den Werth 43° erreicht hat. Es zeigt sich mitten im Gesichtsfelde während einer Drehung der Kugel um ca. 13° der Ring der conischen Refraction, wenn auch im Anfange, Mitte und am Ende mit verschiedener Phase und Intensität. Grösste Schärfe und Intensität war bei $Z_c K_1 = 37$ bis 38° zu beobachten, woraus $K_1 K_2 = 74$ bis 76° folgt.

Das von Hamilton, Lloyd, Beer angegebene Gesetz

der Polarisation ist an unserem Präparate in ausgezeichneter Weise wahrzunehmen. Mit freiem Auge und Nicol erkennt man, dass in der Seite der Ringe, welche der Bissectrix ζ zugewendet ist, die Schwingungen parallel der Axenebene erfolgen. Die Reihenfolge der Strahlen kann deshalb durch die Buchstabenfolge $\zeta - \varepsilon \bigcirc \omega$ — schematisirt werden. Die Beobachtungen mit Fernrohr und Vorstecklupe ergeben scheinbar ein entgegengesetztes Resultat, wenn man vergisst, die Verkehrung des Bildes von der Kugel in Betracht zu ziehen.

Die oben notirten Schwingungsrichtungen im Ringe, $\varepsilon \bigcirc \omega$, stimmen vollkommen mit der Strahlenfläche eines positiven Krystalles überein, und der rechten und linken Seite des Ringes verbleibt während aller Phasen der Ringbildung ihre charakteristische Schwingungsrichtung. Im Anfange der Ringbildung liegen die den Strahlen $\varepsilon \omega$ entsprechenden Stellen in der Axenebene; sie sind intensiv hell und durch weniger helle Ringsegmente miteinander verbunden. Die Mitte des Ringes bleibt auch bei weiterer Drehung der Kugel (das heisst: bei zunehmender angularer Entfernung der anvisirten Stelle von der Bissectrix Z_c) in der Mitte des Gesichtsfeldes. Allein die eben erwähnten hellen Stellen im Ringe selbst ändern mit jedem Grade der Kugeldrehung continuirlich ihren Ort in der Peripherie des Ringes, bis sie endlich wieder in die Axenebene gelangen, aber an Orte, die von der ursprünglichen Stellung um 180° (die halbe Ringperipherie) verschieden sind. Ist dies erreicht, dann beginnt der Ring zu verschwinden. Während dieser Ortsänderung haben die hellen Strahlen, trotzdem man ihre Wanderung im Ringe während der Kugeldrehung continuirlich verfolgen kann, auch successive ihr ursprüngliches Azimuth der Polarisation geändert und am Schlusse die entgegengesetzte Schwingungsrichtung angenommen. So verbleibt den Seiten des Ringes vom Anfange bis zum Ende der Sichtbarkeit die gleiche Polarisationsrichtung.

Aus dem Gesagten erhellt, dass die angular Distanz zweier Ringe der conischen Refraction $K_1 K_2 = 2 Z_c K$ bis zu einem gewissen Betrage unabhängig ist von der Drehung der Kugel. Ein präciser Werth für $K_1 K_2$ lässt sich deshalb mit dem Goniometer nicht gewinnen; denn ist der Ring einmal

sichtbar, dann bewirkt bis zu einer gewissen Grenze die weitere Drehung der Kugel keine Verschiebung des Ringes im Gesichtsfelde, sondern nur ein Rotiren der Strahlen im Ringe um das Centrum dieses Ringes. Der Ring ist am hellsten und homogen in der Mitte zwischen Anfang und Endstellung, hier heben sich die hellen Stellen kaum merkbar von den übrigen ab; sie haben ein Azimuth der Polarisation von 45° und nehmen die obersten und untersten Segmente im Ringe ein. Diese Stellung kann auch gewählt werden, um die Winkel $K_1 K_2$ bei verschiedenen Beobachtungsserien und Combinationen der Ringe $K_1 K_2 K'_1 K'_2$ auf eine idente und vergleichbare Ringphase zu beziehen.

Trotz dieser besprochenen Aenderung der Phasen des Ringes bleibt im wesentlichen die Ringbreite gleich, vorausgesetzt, das beobachtende Auge behält seine einmal gewählte Stellung bei. Hier tritt wohl die Complication unseres Phänomens mit der äusseren conischen Refraction wenig störend auf, weil nur parallele Strahlen einfallen. Aber trotz des Fernrohres merkt man doch Veränderungen im Aspecte der conischen Refraction. Diese hängen von der Distanz des beobachtenden Auges ab, wie solches schon Lloyd und Haidinger erkannt hatten. In unserem Falle sieht man eine helle Kreisscheibe, wenn das Auge knapp an das Ocular gepresst wird, hingegen nur eine helle Kreislinie, wenn man das Auge 10 cm weit vom Ocular entfernt hält. In normaler Beobachtungsdistanz wird ein mittelmässig breiter Ring gesehen.

Die Apertur des Ringes, d. h. der Winkel φ_i der inneren conischen Refraction kann nach zwei Methoden bestimmt werden.

Die erste Methode basirt auf einer genauen linearen Messung der scheinbaren Ringbreite im Gesichtsfelde des Beobachtungsfernrohres. Man setzt hierbei nach Lloyd voraus, dass für den theoretischen Diameter des Ringes der Mittelwerth gilt von den Diametern der ihn nach innen und aussen begrenzenden Kreise. Diese Messung der Diameter ist möglich mittelst eines verschiebbaren Oculars oder am Goniometer Modell I mittelst der Tangentialverschiebung des Fernrohres in toto. Zur Controle muss mittelst derselben

Messvorrichtung auch der Diameter der Kugel gemessen werden. Letzteres ergab in unserem Falle gut stimmende Resultate.

Grössere Beobachtungsreihen zu verschiedenen Zeiten durchgeführt, ergaben für die Länge der Diameter an der äusseren (a) und der inneren (i) Contour:

$$\begin{array}{ll} a = 2,30 \text{ mm} & i = 1,10 \text{ mm} \\ = 2,42 & = 0,96 \end{array}$$

Mittlerer Diameter = 1,695 mm. Kugeldiameter = 15 mm — $q_i = 6^{\circ}28'$.

Zweite Methode. Goniometrisch lässt sich die Apertur der conischen Refraction nur auf einem Umwege ermitteln. Es kommen nämlich die rechte oder linke Seite (ε, ω) des Ringes nur dann in die Mitte des Gesichtsfeldes, wenn der einfallende und austretende Strahl nicht vollkommen parallel sind. Dies erzielt man bei fixer Stellung von Kugel und Beobachtungsfernrohr durch Verschiebung des Collimators im Betrage einiger Grade. Wird so der Winkel $K_1 K_2$ — bei gleicher Anfangsphase beider Ringe — gemessen, und zwar einmal vom äusseren Rand ω_1 bis zum anderen äusseren Rande des zweiten Ringes ω_2 , das zweite mal vom inneren Rande ε_1 bis ε_2 , so erhält man zwei Werthe der conischen Ringdistanz, nämlich $K_1^{\omega} K_2^{\omega}$ und $K_1^{\varepsilon} K_2^{\varepsilon}$. Aus diesen Zahlen folgt q_i , denn:

$$2 q_i = K_1^{\omega} K_2^{\omega} - K_1^{\varepsilon} K_2^{\varepsilon}.$$

Die entsprechenden Beobachtungsreihen, mit Gaslampenlicht durchgeführt, ergaben:

$$\begin{array}{l} K_1^{\omega} K_2^{\omega} = 70^{\circ}25' \\ K_1^{\varepsilon} K_2^{\varepsilon} = 56^{\circ}41' \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} K_1^{\omega} K_2^{\omega} \\ K_1^{\varepsilon} K_2^{\varepsilon} \end{array}} \right\} \Delta = 13^{\circ}44', \quad q_i = 6^{\circ}52' \text{ beobachtet.} \\ q_i^{Na} = 6^{\circ}52' \text{ berechnet.}$$

Veränderungen von circa 3° in der Stellung des Collimators reichen hin, um eine Ringseite statt der Ringmitte mit dem Verticalfaden des Beobachtungsfernrohrs zur Coincidenz zu bringen. Der Collimator muss der Bissectrix an der Einfallfläche zugekehrt werden, damit ω — hingegen von Z_c entfernt werden, damit ε in die Mitte des Gesichtsfeldes komme. Es folgt dies auch aus der Construction der einfallenden und gebrochenen Strahlen, indem die Aufgabe eigentlich lautet: der Einfallswinkel ist soweit zu ändern,

dass ω und ε näher zu dem früheren Einfallslothe hin gebrochen werden.

Die Dispersionsverhältnisse im Ringe zeigen bei unserer Substanz wenig Bemerkenswerthes, weil der optische Axenwinkel des Schwefels für die verschiedenen Wellenlängen sehr wenig variirt. Die Messungen bei mittlerer Ringphase und monochromatem Licht ergaben:

$$K_1 K_2 = 76^\circ 18' \text{ Natrium,}$$

$$K_1 K_2 = 76^\circ 14' \text{ Thallium.}$$

Im Sonnenlichte merkt man nur, dass die äussere Contour des Ringes an jener Seite intensiver grün gefärbt ist, welche der Bissectrix zugewendet ist. Eine grelle Spectralfärbung der Ringe ist jedoch sichtbar, wenn man denselben schief anvisirt. Dies wird erreicht durch Verschiebung des Beobachtungsfernrohrs bei geklemmter Kugel und Collimator. Bei geradsichtiger Beobachtung ist der ganze innere Saum roth, der gesammte äussere schwach grün tingirt. Ist aber der austretende Strahl etwa 10° gegen den einfallenden geneigt, dann verwandelt sich der Kreis in einen elliptischen Ring, dessen kürzerer Diameter in der Axen- und Limbus-ebene, und dessen innerer Saum und ebenso auch dessen äusserer Saum an den Schnittpunkten mit der Axenebene complementär gefärbt sind. Aus der ursprünglichen Reihenfolge der Farben: grün, roth, dunkel, roth, grün, wird die Reihenfolge, roth, grün, dunkel, roth, grün. Dies entspricht dem Uebergange des früher homogenen Ringes in zwei Spectra, die noch durch Kreissegmente zu einem ringähnlichen Gebilde vereint sind.

Schliesslich ist hervorzuheben, dass bei Verwendung parallelen Lichtes die objective Darstellung und die Projection des cylindrischen Strahlenbündels auf mattes Glas nicht möglich ist.

II. Demonstrationen mittelst convergenten Lichtes.

§ 6. Die wichtigsten und für die Form der Strahlenflächen massgebendsten Erscheinungen lassen sich mit Benutzung convergenten Sonnenlichtes objectiv darstellen. Für die Versuche ward eine optische Bank mit messbaren Inter-

vallen der Ständer benutzt. Die nothwendige Reihenfolge der Aufstellung ist folgende: Heliostat, Alaunlösung, Blende, planconvexe Linse von ca. 15 mm Brennweite und mit der convexen Seite der Schwefelkugel zugewendet, Schwefelkugel, matte Glastafel, Auge. Zwischen Linse und Kugel ward keine Blende eingeführt, weil die sphärische Form an sich das Eintrittsfeld beschränkt, andererseits die Versuche ohne diese Abblendung des Gesichtsfeldes weit besser gelingen.

Ist die Linse genau um ihre Brennweitendistanz von der Schwefelkugel entfernt, so erhält man die früher beschriebenen subjectiven Bilder auf der Austrittsfläche des Präparates, welche für eine objective Projection nicht taugen. Nähert man hingegen die Linse bis auf zwei Drittel ihrer Brennweite, bis sich auf der Eintrittsfläche eine ca. 1 mm grosse Brennfläche zeigt, dann sind die aus der Kugel austretenden Strahlen kräftig genug, um auf der matten Glastafel reelle Bilder, selbst bis zu 30 cm Grösse, zu erzeugen. Gaslampenlicht ist für so grosse Bilder nicht kräftig genug, genügt aber für solche von kleinerem Diameter. Das Gelingen des Versuches setzt nur ein genaues Centriren von Kugel und Linse voraus. Die zur Demonstration besonders wichtigen Kugellagen sind im Folgenden kurz besprochen.

§ 7. Austritt der Strahlen in der Richtung der Bissectrix. Ist die Axe des einfallenden Strahlenconus parallel Z_c , und trifft auch thatsächlich die Spitze dieses Conus die Kugel centrisc im Orte der Bissectrix, so tritt aus dem Präparate ein conisches Strahlenpaar mit gemeinsamer Axe. Dieser Strahlenconus besitzt aber keinen kreisförmigen, sondern einen doppelt elliptischen Querschnitt, und er gibt auf der matten Glastafel das reelle Bild zweier sich durchkreuzender heller elliptischer Scheiben. Eine dieser Ellipsen hat ihre längere Axe a horizontal, die zweite Ellipse hingegen a vertical gerichtet, und die Schwingungsrichtungen sind diesen längeren Axen parallel. In dem centralen Felde, welches beiden Ellipsen gemeinsam ist, ist der Lichtstrahl dipolarisirt¹⁾, und das Phänomen liefert einen guten Beweis für die Möglichkeit der Coexistenz zweier Schwingungszumuthe bei gleicher Fortpflanzungsrichtung der Strahlen.

1) Haidinger, Pogg. Ann. 96. p. 481. 1855.

Die absolute Grösse des objectiven Bildes hängt ab einerseits von der Distanz des auffangenden Glases, andererseits von der totalen Brennweite des hier vorliegenden Linsensystems, welches aus Beleuchtungslinse und Schwefelkugel combinirt ist. Da bei parallel einfallendem Lichte der Brennpunkt der Schwefelkugel (vgl. § 2) in der Austrittsfläche liegt, so wird nur bei divergent einfallendem Lichte die Brennweite positiv, hingegen hier, wo durch die genäherte Linse die Strahlen convergent gemacht sind, ist die Brennweite des Systems negativ. Der Brennpunkt liegt daher im Inneren des Präparates. Von ihm aus gehen divergente Strahlen zur Austrittsfläche und werden hier durch gewöhnliche Brechung noch mehr divergent gemacht. Deshalb hat der Conus der austretenden Strahlen gerade bei Annäherung der Linse an die Kugel eine sehr grosse Apertur.

Die Angabe einiger Messungen wird das eben Gesagte versinnlichen.

Es bezeichne L die Distanz in Luft zwischen Kugel und Linse, welche letztere ungefähr 15 mm Brennweite besass. Die Distanz in Luft zwischen matter Glastafel und Austrittsfläche der Kugel sei G . Ferner sei E das Maass der längeren, e das Maass der kürzeren Axe jener elliptischen Lichtscheiben, die beim Durchgang der Strahlen in der Richtung der Bissectrix auf der matten Glastafel objectiv sichtbar werden. Die Beobachtungen mittelst der optischen Bank ergaben hierfür folgende Werthe, alle in Millimetern angegeben.

$L =$	10,5	10,5	6,0	5,1
$G =$	90	210	65	155
$E =$	27	53	45	150
$e =$	16	30	30	100

Hieraus ergibt sich, dass im letzteren Falle ($E = 150$) die Apertur des austretenden Strahlenconus ca. 50° betrug.

§ 8. Conische Refraction. Dreht man die Krystallkugel um die mittlere Elasticitätsaxe, so gelangt man, von ζ ausgehend, vorerst zu einer intermediären Stellung. In dieser trennen sich die eben besprochenen hellen Ellipsen und vereinigen sich erst bei fortgesetzter Drehung zu dem Ringe oder der hellen Kreisscheibe bei der conischen Refrac-

tion. Da convergentes Licht einfällt, verdankt das objective Bild der letzteren theils Strahlen der äusseren, theils solchen der inneren seinen Ursprung. Haidinger hat die schon von Lloyd beschriebene Variation der subjectiven Lichtbilder zurückgeführt auf die in verschiedener Entfernung stattfindenden Schnitte¹⁾ durch die vereinten Strahlenbündel der äusseren und inneren conischen Refraction. Die Ideen Haidinger's und Lissajous' weiter verfolgend, hat Billet die Trennung beider Strahlensysteme durch eine eingeschaltene Linse vorgeschlagen.²⁾ Hier ist es wohl überflüssig, dieses von Haidinger und Billet besprochene Verhältniss weiter zu erörtern. Die Beschreibung der wichtigsten objectiven Phänomene mag genügen.

Die Grösse des Lichtbildes nimmt mit der Glasdistanz zu, mit der Linsendistanz ab (vgl. § 7). Der Diameter der äusseren Contour der grossen hellen Kreisscheibe sei A . Ist die Beleuchtungslinse in normaler Brennweite, so bildet sich nur ein heller Ring mit dunklem Mittelfelde, welches letztere den Diameter d besitzt, und in dessen Centrum ein kleiner, heller Punkt bemerkbar ist. Gemessen wurde:

$$L = 15 \text{ mm} \quad G = 180 \text{ mm} \quad A = 40 \text{ mm} \quad d = 25 \text{ mm}.$$

Wird hingegen die Linse näher gerückt, so verengt sich das dunkle Feld. Es tritt der helle Punkt greller hervor, er verbreitet sich und bringt das ganze dunkle Centrum zum Verschwinden. Man hat dann in der Mitte der hellen Kreisscheibe kein dunkles, sondern ein intensiv beleuchtetes helles Feld, dessen Diameter h wohl mit der Glasdistanz zunimmt, jedoch mit der Annäherung der Linse an die Kugel wieder abnimmt. Ich erwähne beispielsweise folgende Messungen:

$L =$	12	12	10	7,5	mm
$G =$	200	250	140	125	"
$A =$	60	90	63	72	"
$h =$	29	43	14	8	"

Dass diese optischen Bilder die bekannte Polarisation der conischen Refraction zeigen, ist selbstverständlich. Man kann zu diesem Zwecke in den Gang der Lichtstrahlen ent-

1) Haidinger, Pogg. Ann. 96. Fig. 26 u. 27. 1855.

2) Billet, Tr. de opt. phys. 2. p. 573. Fig. 320.

weder einen Polarisator oder einen Analysator einschalten. Auch kann man, wie dies einst Haidinger that, den Lichtstrahl Platten von Calcit und Quarz passiren lassen, um die verschieden polarisirten Stellen im Ringe durch die verschiedenen complementären Farben zu markiren. Wegen der Verkehrung der Bilder wäre § 2 zu berücksichtigen. Schliesslich soll nur erwähnt werden, dass die austretenden Strahlen genug intensiv sind, um auch dann objective Bilder zu geben, wenn sie mittelst eines Spiegels auf eine Wand projecirt werden.

Wien, Januar 1889.

**VIII. Ueber den Einfluss elastischer Deformationen, speciell einseitigen Druckes, auf das optische Verhalten krystallinischer Körper;
von Friedrich Pockels.**

Einleitung: Historische Uebersicht.

Die Thatsache, dass man in isotropen Körpern durch einseitigen Druck oder Zug Doppelbrechung hervorbringen kann, wurde im Anfange dieses Jahrhunderts von Brewster entdeckt. Derselbe untersuchte in einer Reihe von Arbeiten¹⁾ zunächst weiche organische Substanzen, wie Leim, Wachs, Harz, sodann Glas, Flusspath, Steinsalz und fand, dass sich diese Körper, wenn sie einseitigem Drucke ausgesetzt werden, wie negative, dagegen bei Einwirkung einseitigen Zuges wie positive optisch einaxige Krystalle verhalten, und ferner, dass der Gangunterschied der beiden Strahlen dem ausgeübten Drucke annähernd proportional ist. Während Brewster zu diesen Resultaten nur durch die Beobachtung der Interferenzfarben im polarisirten Lichte gelangte, wies Fresnel 1822 durch seinen bekannten Versuch mit Glasprismen die Doppelbrechung im comprimierten Glase direct nach.²⁾ Schon einige Jahre früher

1) Brewster, Phil. Trans. 1815 p. 60, 1816 p. 156; Trans. of the Royal Soc. of Edinb. 8. 1818. p. 369; Pogg. Ann. 19. p. 527. 1830.

2) Fresnel, Ann. de chim. et de phys. (2) 20. p. 376. 1822.

hatte Fresnel versucht, die absoluten Aenderungen der Lichtgeschwindigkeit in gebogenen Glasstreifen durch Beobachtung der Verschiebung von Beugungsstreifen zu ermitteln, war aber zu keinem sicheren Resultate gelangt.¹⁾

Im Jahre 1841 legte F. Neumann der Berl. Acad. eine sehr umfangreiche Abhandlung²⁾: „Ueber die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimirten und ungleichförmig erwärmten unkrystallinischen Körpern“ vor, in deren ersten Theile er eine allgemeine Theorie dieser Erscheinungen aufstellte. Neumann gelangte zu folgenden Ausdrücken für die drei Hauptlichtgeschwindigkeiten in einem deformirten isotropen Körper:

$$\begin{aligned} A &= G + qx_x + py_y + pz_z, & B &= G + p_x x + qy_y + pz_z, \\ C &= G + p_x x + py_y + qz_z, \end{aligned}$$

worin G die Lichtgeschwindigkeit vor der Deformation, x_x, y_y, z_z die Hauptdilatationen und p, q zwei der Substanz eigenthümliche Constanten bedeuten. Aus Beobachtungen an einem gebogenen Glasstreifen berechnete Neumann die Werthe $(p - q)/G^2 = 0,126$, $p/G = -0,131$, $q/G = -0,213$, wobei die Lichtgeschwindigkeit in Luft $= 1$ gesetzt ist. Hiernach hätte eine durch allseitig gleichen Druck erzeugte Compression des Glases eine Abnahme des Brechungscoefficienten zur Folge; dieses auffallende Resultat Neumann's beruht jedoch auf einer unrichtigen Berücksichtigung der Dickenänderung des Glasstreifens bei der Biegung.

Die erste Beobachtung über den Einfluss einseitigen Druckes auf die Doppelbrechung in optisch einaxigen Krystallen rührt ebenfalls von Brewster her.³⁾ Nach ihm haben Moigno und Soleil⁴⁾ über diesen Gegenstand Versuche angestellt (an Quarz, Beryll und Turmalin) und gefunden, dass optisch einaxige Krystalle durch einen senkrecht zur Axe ausgeübten Druck zweiaxig werden, und dass die Ebene der optischen Axe dann bei

1) Fresnel, Ann. de chim. et de phys. (2) 15. p. 384. 1820; Pogg. Ann. 30. p. 260. 1836.

2) Ein Auszug aus derselben findet sich in Pogg. Ann. 54. p. 449. 1841 u. Berl. Ber. 1841. Theil II. p. 1.

3) Brewster, Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. 8. p. 281. 1818.

4) Moigno u. Soleil, Compt. rend. 30. p. 361. 1850.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVII.

positiven Krystallen parallel der Druckrichtung, bei negativen senkrecht zu derselben ist.

Dieses Verhalten stimmt überein mit den Beobachtungen Brewster's und Neumann's an isotropen Körpern, wonach letztere durch einseitigen Druck negativ einaxig werden.

Die Untersuchung der Doppelbrechung im comprimierten oder dilatirten Glase wurde von Wertheim¹⁾ wieder aufgenommen. Derselbe unterwarf Glasparallelepipeda einem gleichförmigen messbaren Drucke, indem er sie mittelst einer einfachen Vorrichtung durch Gewichte belastete, und fand durch zahlreiche Beobachtungen bei verschiedenen Belastungen die Behauptung Brewster's, dass die Stärke der Doppelbrechung dem Drucke proportional sei, vollkommen bestätigt. Ferner constatirte er, dass der durch einseitige Dilatation hervorbrachte Gangunterschied dem durch die gleich grosse einseitige Compression erzeugten entgegengesetzt gleich, und dass der Gangunterschied der Wellenlänge umgekehrt proportional war. Wertheim dehnte seine Versuche auch auf reguläre Krystalle, nämlich auf Alaun, Steinsalz und Flussspath aus²⁾, wobei es ihm auffiel, dass die Schwingungsrichtungen in den comprimierten Krystallplatten oft bedeutend von der Druckrichtung und der zu ihr senkrechten Richtung abwichen, und dass der erzeugte Gangunterschied unter sonst ganz gleichen Umständen sehr verschieden gross war, wenn der Druck auf verschiedene Flächenpaare der Krystallparallelepipeda ausgeübt wurde. Er glaubte gefunden zu haben, dass dieses scheinbar anomale Verhalten von der Ausbildung der natürlichen Krystallflächen abhinge; würfelförmige Krystalle von Steinsalz und Flussspath zeigten dasselbe nicht. Der Charakter der durch Druck erzeugten Doppelbrechung war bei allen untersuchten Körpern derselbe wie beim Glase. Aus dem Jahre 1855 ist eine Abhandlung von Bravais³⁾ zu erwähnen, in welcher numerische Werthe des Gangunterschiedes des ordinären und extraordinären

1) Wertheim, *Compt. rend.* **32.** p. 289. 1851; *Pogg. Ann.* **86.** p. 321. 1852.

2) Wertheim, *Compt. rend.* **33.** p. 576. 1851; **35.** p. 276. 1852 u. *Pogg. Ann.* **86.** p. 321. 1852; **87.** p. 498. 1852.

3) Bravais, *Ann. de chim. et de phys.* (3) **43.** p. 147. 1855; *Pogg. Ann.* **96.** p. 395. 1855.

ren Strahles im einseitig comprimierten Glase und Steinsalze angegeben sind.

Versuche mit einaxigen Krystallen wurden wieder von Pfaff¹⁾ angestellt, jedoch mit ziemlich rohen Hilfsmitteln; die von Moigno und Soleil aufgestellte Regel bestätigte sich bei allen von ihm untersuchten Krystallen, nämlich bei den positiven: Quarz, Zirkon, Apophyllit, und den negativen: Kalkspath, Beryll, Turmalin, Honigstein. Uebrigens untersuchte Pfaff hauptsächlich die bleibenden Veränderungen, welche die Interferenzringe im Kalkspath infolge der Bildung von Zwillingslamellen durch starken Druck erleiden. Aehnliche Beobachtungen, wie diejenigen Pfaff's, sind später von Hrn. Van der Willigen mitgetheilt worden.²⁾

Die durch einseitigen Druck erzeugte Doppelbrechung des Glases bildete nochmals den Gegenstand einer grösseren Arbeit, welche Hr. Mach 1872 veröffentlichte.³⁾ Aus den nach einer empfindlichen Beobachtungsmethode (welche auf der Verschiebung von Interferenzstreifen im Spectrum beruhte) ausgeführten Messungen desselben ergab sich im Mittel $(p - q) / G^2 = 0,134$. Hr. Mach fand ausserdem mittelst des Jamin'schen Interferentialrefractors, dass sich die Geschwindigkeit der parallel der Druckrichtung polarisirten Welle in demselben Sinne, aber doppelt so stark änderte, als diejenige der senkrecht zur Druckrichtung polarisirten Welle. Hieraus und aus obigem Werthe von $(p - q) / G^2$ berechnete Hr. Mach $p / G = - 0,132$, $q / G = - 0,216$, wobei jedoch ein Fehler vorgekommen ist.

Die Herren Mach und Merten stellten auch eine Untersuchung an: „Ueber die Aenderung der Lichtgeschwindigkeit im Quarz durch Druck“⁴⁾, welche zwar nur qualitative, aber sehr interessante Resultate ergeben hat, besonders da der senkrecht zur Axe gepresste Quarz das erste Beispiel eines optisch zwei-axigen circularpolarisirenden Krystalles darbot. Es zeigte sich

1) Pfaff, Pogg. Ann. 107. p. 333. 1859; 108. p. 598. 1859.

2) Van der Willigen, Arch. de musée de Teyler 3. p. 292. 1874.

3) Mach, Pogg. Ann. 146. p. 314. 1872; Optisch-akustische Versuche, Prag 1873.

4) Mach u. Merten, Wien. Ber. (2) 72. p. 315. 1875; Pogg. Ann. 156. p. 639. 1875.

unter Anderem, dass die Drehung der Polarisationssebene für einen Strahl, der sich im comprimierten Quarz parallel einer der optischen Axen fortpflanzt, merklich dieselbe ist, wie für einen der Hauptaxe parallelen Strahl vor der Compression. Ferner fand Hr. Mach, dass im Quarz durch einen in beliebiger Richtung ausgeübten Druck die Geschwindigkeiten der sich senkrecht zur Druckrichtung fortpflanzenden Strahlen stets verkleinert werden.

Dass man in isotropen Körpern durch Druck oder Zug auch Dichroismus erzeugen kann, wurde zuerst von Hrn. Kundt¹⁾ an Kautschuk, dann von Hrn. v. Seherr-Thoss²⁾ an auf Glas gestrichenen breiartigen Farbstoffen und, was besonders bemerkenswerth erscheint, von Hrn. v. Lasaulx³⁾ an Krystallen der Silberhaloide beobachtet.

1880 veröffentlichte Hr. Macé de Lépinay eine umfangreiche experimentelle Arbeit über die accidentelle Doppelbrechung in Glas⁴⁾, welche hauptsächlich die durch ungleichförmige Erwärmung hervorgerufenen Erscheinungen zum Gegenstande hat.

Eine Abhandlung von Hrn. Jannetaz⁵⁾, eine von Hrn. Bücking⁶⁾ und mehrere von Hrn. Klocke⁷⁾ beziehen sich auf Alaun und einige andere krystallisirte Körper, welche im natürlichen Zustande optische Anomalien zeigen, sowie auf die künstliche Nachahmung der letzteren durch gespannte Colloide. Besonders ist noch zu erwähnen die Abhandlung von Hrn. Bücking: „Ueber den Einfluss eines messbaren Druckes auf doppeltbrechende Mineralien.“⁸⁾ Hr. Bücking unterwarf senkrecht zur optischen Axe geschnittene Platten von Quarz, Beryll, Apatit und Turmalin einem seitlichen Drucke, der durch eine

1) Kundt, Pogg. Ann. 151. p. 126. 1874.

2) v. Seherr-Thoss, Wied. Ann. 6. p. 270. 1879.

3) v. Lasaulx, Sitzungsber. der schles. Ges. f. vaterl. Cultur. 1879. p. 171.

4) Macé de Lépinay, Ann. de chim. et de phys. (5) 19. p. 5. 1880.

5) Jannetaz, Zeitschr. f. Kryst. 4. p. 421. 1880.

6) Bücking, N. Jahrb. f. Min. 1. Ref. p. 177. 1881; Ztsch. d. deutschen geolog. Ges. 32. p. 199. 1880.

7) Klocke, Ber. d. Verhandl. d. Naturf.-Ges. zu Freiburg i. B. 1881. p. 31; N. Jahrb. f. Min. 2. p. 249. 1881.

8) Bücking, Zeitschr. f. Kryst. 7. p. 555. 1883.

Schraube ausgeübt und mittelst einer Feder gemessen wurde, und beobachtete die Grösse des entstehenden optischen Axenwinkels; er wollte das Gesetz finden, nach welchem der letztere mit dem Drucke zunimmt, und hat zu diesem Zwecke die Grösse des Axenwinkels als Function des Druckes durch Curven dargestellt. Nimmt man an, dass sich die drei Hauptlichtgeschwindigkeiten proportional mit dem Drucke ändern, und dass diese Aenderungen sehr klein sind gegen die Differenz der Hauptlichtgeschwindigkeiten im undeformirten Krystall, so muss der Axenwinkel der Quadratwurzel aus dem Drucke proportional sein. Berechnet man hiernach die Beobachtungen von Hrn. Bücking, so ergibt sich eine ziemlich gute Uebereinstimmung, wenigstens beim Beryll und Apatit.

Seit dieser Arbeit Bücking's scheinen keine Untersuchungen über den Einfluss von elastischen Deformationen auf die optischen Eigenschaften krystallinischer Körper angestellt zu sein. Dagegen ist noch ganz kürzlich eine umfangreiche Abhandlung über die Doppelbrechung im comprimierten Glase von Hrn. Kerr veröffentlicht worden¹⁾, welcher die absoluten Aenderungen der Lichtgeschwindigkeit nach einer neuen Methode bestimmt hat.

Endlich mögen hier noch diejenigen Untersuchungen erwähnt werden, welche sich auf die Aenderung der Doppelbrechung mit der Temperatur beziehen. Die ersten derartigen Beobachtungen hat Rudberg²⁾ angestellt, welcher die Aenderung der Hauptbrechungscoëfficienten von Quarz, Kalkspath und Aragonit bei Erwärmung mittelst Prismen bestimmte. Die Beobachtungen an Quarz und Kalkspath wurden später nach einer feineren Methode von Fizeau³⁾ wiederholt. Die Aenderung der Stärke der Doppelbrechung mit der Temperatur untersuchte Pfaff⁴⁾ an verschiedenen Krystallen, die Aenderung

1) Kerr, Phil. Mag. 26. Octoberheft. 1888. Auf die Ergebnisse der Untersuchungen Neumann's, Mach's und Kerr's über die Doppelbrechung im comprimierten Glase werde ich in einem Anhange der nachstehenden Abhandlung etwas näher eingehen.

2) Rudberg, Pogg. Ann. 26. p. 291. 1832.

3) Fizeau, Compt. rend. 58. p. 923. 1864; Pogg. Ann. 119. p. 97, 111, 297. 1863; Pogg. Ann. 123. p. 515. 1864.

4) Pfaff, Pogg. Ann. 123. p. 179. 1864; Sitzungsber. der phys.-med. Soc. zu Erlangen 1878. p. 213.

des Axenwinkels zahlreicher zweiaxiger Krystalle bestimmte Descloiseaux.¹⁾ In neuerer Zeit ist eine sehr umfangreiche Arbeit über den Einfluss der Temperatur auf die Brechungscoëfficienten von Quarz, Beryll und Flussspath von Hrn. Dufet²⁾ und eine solche über die Aenderung der Brechungscoëfficienten des Quarzes von Hrn. Müller³⁾ veröffentlicht worden.

Eine Uebersicht der Litteratur, welche sich auf die künstliche Erzeugung resp. Aenderung der Doppelbrechung durch Druck und Erwärmung bezieht, findet sich in Verdet's „Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes“ (deutsche Bearbeitung von Exner) am Schlusse des Abschnittes über accidentelle Doppelbrechung (p. 332—334).

In der nachstehenden Arbeit, welche ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Voigt ausgeführt habe, soll zunächst im Anschluss an die von Neumann für isotrope Körper gegebene Theorie die Einwirkung einer beliebigen homogenen elastischen Deformation auf das optische Verhalten krystallinischer Körper theoretisch behandelt werden. Sodann sollen die erhaltenen Formeln speciell auf rhomboëdrische und reguläre Krystalle, auf welche ein einseitiger Druck ausgeübt wird, angewandt und mit den Resultaten von Beobachtungen verglichen werden, welche ich an Bergkrystall und Flussspath im physikalischen Institute zu Göttingen angestellt habe. Sämmtliche Hilfsmittel für die experimentelle Untersuchung wurden mir vom physikalischen Institute zur Verfügung gestellt. Das Material für die untersuchten Krystallparallelepipeda verdanke ich Hrn. Prof. Voigt; es entstammt denselben Krystallen von Quarz und Flussspath, aus welchen die von Hrn. Prof. Voigt zur Bestimmung der Elasticitätsconstanten verwendeten Stäbchen hergestellt worden sind. Dieses Material war für die vorliegende Untersuchung besonders werthvoll, weil bei derselben die genaue Kenntniss der Elasticitätsconstanten erforderlich ist.

1) Descloiseaux, *Compt. rend.* 62. p. 988. 1866 u. *Pogg. Ann.* 119. p. 481. 1863.

2) Dufet, *Bull. de la soc. minér. de France* 1885. 7. p. 182; 8. p. 187 u. 257.

3) Müller, *Publ. des astrophysik. Observat. zu Potsdam* 4. p. 151. 1885.

I. Theoretischer Theil.

1. Allgemeine Formeln.

Die Neumann'sche Theorie bedarf für krystallinische Körper deshalb einer Verallgemeinerung, weil bei diesen das optische Symmetriexensystem im Allgemeinen nicht, wie bei isotropen Körpern, mit dem Hauptdilationsaxensystem zusammenfallen kann, also die Lage des ersteren erst aus der gegebenen Deformation bestimmt werden muss.

Die erste Annahme, welche der Theorie zu Grunde gelegt werden soll, ist die, dass auch in einem innerhalb der Elastizitätsgrenzen deformirten krystallinischen Körper noch die Fresnel-Neumann'schen Gesetze für die Fortpflanzung des Lichtes gelten — eine Annahme, welche wohl dadurch einigermaßen berechtigt ist, dass bisher noch in keinem doppeltbrechenden Medium eine Abweichung von jenen Gesetzen nachgewiesen worden ist. Gemäss dieser Annahme gibt es nach der Deformation wieder ein Fresnel'sches Ovaloid, dessen Hauptaxen (das sind die Hauptlichtgeschwindigkeiten) mit $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ bezeichnet werden mögen; parallel diesen Hauptaxen seien die x -, y - und z -Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Der Radiusvector ρ des Ovaloids ist dann als Function seiner auf das Hauptaxensystem bezogenen Richtungs-cosinus μ, ν, π gegeben durch:

$$(1) \quad \rho^2 = \omega_x^2 \mu^2 + \omega_y^2 \nu^2 + \omega_z^2 \pi^2.$$

Diese Gleichung des Ovaloids soll nun auf dasjenige Coordinatensystem x^0, y^0, z^0 transformirt werden, welches das optische Symmetriexensystem im undeformirten Krystall, bei höher symmetrischen Krystallen also zugleich ein krystallographisches Symmetriexensystem ist. Die Bezeichnung der neuen optischen Symmetriexen soll stets so gewählt werden, dass bei der Deformation ein stetiger Uebergang von x^0 in x , y^0 in y , z^0 in z stattfindet. Die Richtungs-cosinus der x -, y - und z -Axe in Bezug auf das Coordinatensystem x^0, y^0, z^0 sollen in der aus nachstehender Tabelle ersichtlichen Weise bezeichnet werden:

	x	y	z
x^0	α_1	β_1	γ_1
y^0	α_2	β_2	γ_2
z^0	α_3	β_3	γ_3

Ferner seien μ^0, ν^0, π^0 die Richtungsco sinus des Radiusvectors ρ in Bezug auf das Axensystem x^0, y^0, z^0 ; dann ist

$$\begin{aligned} u &= \mu^0 \alpha_1 + \nu^0 \alpha_2 + \pi^0 \alpha_3, & v &= \mu^0 \beta_1 + \nu^0 \beta_2 + \pi^0 \beta_3, \\ \pi &= \mu^0 \gamma_1 + \nu^0 \gamma_2 + \pi^0 \gamma_3. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in (1) erhält man die Gleichung des neuen Ovaloids, bezogen auf das Axensystem x^0, y^0, z^0 :

$$(3) \quad \rho^2 = B_{11} \mu^{02} + B_{22} \nu^{02} + B_{33} \pi^{02} + 2B_{23} \nu^0 \pi^0 + 2B_{31} \pi^0 \mu^0 + 2B_{12} \mu^0 \nu^0,$$

wo gesetzt ist:

$$(4) \quad \begin{cases} \omega_x^2 \alpha_1^2 + \omega_y^2 \beta_1^2 + \omega_z^2 \gamma_1^2 = B_{11}, & \omega_x^2 \alpha_2 \alpha_3 + \omega_y^2 \beta_2 \beta_3 + \omega_z^2 \gamma_2 \gamma_3 = B_{23}, \\ \omega_x^2 \alpha_2^2 + \omega_y^2 \beta_2^2 + \omega_z^2 \gamma_2^2 = B_{22}, & \omega_x^2 \alpha_3 \alpha_1 + \omega_y^2 \beta_3 \beta_1 + \omega_z^2 \gamma_3 \gamma_1 = B_{31}, \\ \omega_x^2 \alpha_3^2 + \omega_y^2 \beta_3^2 + \omega_z^2 \gamma_3^2 = B_{33}, & \omega_x^2 \alpha_1 \alpha_2 + \omega_y^2 \beta_1 \beta_2 + \omega_z^2 \gamma_1 \gamma_2 = B_{12}. \end{cases}$$

Die Grössen $B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{23}, B_{31}, B_{12}$ können „Bestimmungstücke des Ovaloids“ genannt werden. Ist keine Deformation vorhanden, so wird $B_{11} = \omega_x^{02}, B_{22} = \omega_y^{02}, B_{33} = \omega_z^{02}, B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0$. Die Grössen $B_{11} - \omega_x^{02}, \dots, B_{23}, \dots$ sind offenbar Functionen der von Kirchhoff mit $x_x, y_y, z_z, y_x, z_x, x_y$ bezeichneten Deformationsgrössen (Dilatationen und Winkeländerungen), durch welche ja der Zustand des deformirten Körpers völlig bestimmt ist; diese Functionen erhalten den Werth 0, wenn die Argumente $= 0$ werden.

Es soll nun die Annahme gemacht werden, dass man sich bei der Entwicklung dieser Functionen nach Potenzen von x_x, \dots, y_x, \dots auf die Glieder erster Ordnung beschränken kann. Dann sind $B_{11} - \omega_x^{02}, \dots, B_{23}, \dots$ homogene lineare Functionen der Deformationsgrössen, es ist also zu setzen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{11} - \omega_x^{02} &= a_{11} x_x + a_{12} y_y + a_{13} z_z + a_{14} y_z + a_{15} z_x + a_{16} x_y, \\ B_{22} - \omega_y^{02} &= a_{21} x_x + \dots + \dots + a_{24} y_z + \dots + \dots, \\ B_{33} - \omega_z^{02} &= a_{31} x_x + \dots + \dots + a_{34} y_z + \dots + \dots, \\ B_{23} &= a_{41} x_x + \dots + \dots + a_{44} y_z + \dots + \dots, \\ B_{31} &= a_{51} x_x + \dots + \dots + a_{54} y_z + \dots + \dots, \\ B_{12} &= a_{61} x_x + \dots + \dots + a_{64} y_z + \dots + \dots, \end{aligned} \right.$$

wo die a_{hk} der Substanz eigenthümliche Constanten, die aber noch von der Wellenlänge abhängen können, und x_x, \dots, y_x, \dots die auf das ursprüngliche Symmetriexsensystem x^0, y^0, z^0 bezogenen Deformationsgrössen bezeichnen. Die Grössen

$B_{11}, \dots, B_{23} \dots$ sind nun als durch die Formeln (5) gegeben zu betrachten, und die Gleichungen (4) sind zur Bestimmung der Unbekannten $\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2, \alpha_1, \dots, \gamma_3$, d. h. der Grössen und Richtungen der Hauptaxen des Ovaloids im deformirten Krystall, zu verwenden. Indem man die Gleichungen (4) der Reihe nach mit den Factoren:

$$\beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2, \beta_3 \gamma_3, \beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2, \beta_3 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_3, \beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1$$

multiplicirt und dann addirt, und indem man ebenso mit den beiden analogen Factorensystemen verfährt, erhält man, da die linken Seiten verschwinden, die drei Gleichungen:

$$(6) \begin{cases} 0 = B_{11} \beta_1 \gamma_1 + B_{22} \beta_2 \gamma_2 + B_{33} \beta_3 \gamma_3 + B_{23} (\beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2) + B_{31} (\beta_1 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_1) \\ \quad + B_{12} (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1), \\ 0 = B_{11} \gamma_1 \alpha_1 + B_{22} \gamma_2 \alpha_2 + B_{33} \gamma_3 \alpha_3 + B_{23} (\gamma_2 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha_2) + B_{31} (\gamma_1 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha_1) \\ \quad + B_{12} (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1), \\ 0 = B_{11} \alpha_1 \beta_1 + B_{22} \alpha_2 \beta_2 + B_{33} \alpha_3 \beta_3 + B_{23} (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) + B_{31} (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) \\ \quad + B_{12} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen sind die Richtungscosinus $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ zu berechnen. Zu diesem Zwecke kann man die letzteren durch drei Winkel ϑ, q, ψ in folgender Weise ausdrücken:

$$(7) \begin{cases} \alpha_1 = -\cos q \cos \psi \cos \vartheta - \sin q \sin \psi, & \alpha_3 = \cos q \sin \vartheta, \\ \beta_1 = -\sin q \cos \psi \cos \vartheta + \cos q \sin \psi, & \beta_3 = \sin q \sin \vartheta, \\ \gamma_1 = \cos \psi \sin \vartheta, & \gamma_3 = \cos \vartheta, \\ \alpha_2 = -\cos q \sin \psi \cos \vartheta + \sin q \cos \psi, & \\ \beta_2 = -\sin q \sin \psi \cos \vartheta - \cos q \cos \psi, & \\ \gamma_2 = \sin \psi \sin \vartheta, & \end{cases}$$

Die Bedeutung der Winkel q, ψ, ϑ ist aus der nebenstehenden Figur ersichtlich, in welcher:

$$\widehat{ZZ^0} = \vartheta,$$

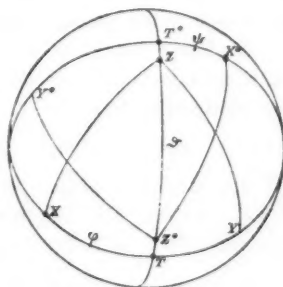
$$\widehat{X^0 T^0} = \psi,$$

$$\widehat{XT} = q \text{ ist.}$$

Man kann nun aus den beiden ersten Gleichungen (6) die Gleichungen ableiten:

$$(B_{11} - B_{33}) \gamma_1 \gamma_3 - B_{23} \gamma_1 \gamma_2 + B_{31} (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) + B_{12} \gamma_2 \gamma_3 = 0,$$

$$(B_{22} - B_{33}) \gamma_2 \gamma_3 + B_{23} (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) - B_{31} \gamma_1 \gamma_2 + B_{12} \gamma_1 \gamma_3 = 0,$$



aus welchen man, wenn ϑ nicht $= 0$ ist, durch Einführung der Ausdrücke (7) folgende cubische Gleichung für $\operatorname{tg} \psi$ erhält:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{tg}^3 \psi \{ B_{23} (B_{31}^2 - B_{12}^2) + B_{31} B_{12} (B_{32} - B_{33}) \} \\ & + \operatorname{tg}^2 \psi \{ B_{31} (B_{11} - B_{33}) (B_{23} - B_{33}) - B_{23} B_{12} (2 B_{11} - B_{22} - B_{33}) \\ & \quad - B_{31} (2 B_{23}^2 - B_{31}^2 - B_{12}^2) \} \\ & + \operatorname{tg} \psi \{ B_{23} (B_{22} - B_{11}) (B_{11} - B_{33}) - B_{31} B_{12} (2 B_{22} - B_{11} - B_{33}) \\ & \quad - B_{23} (2 B_{31}^2 - B_{33}^2 - B_{12}^2) \\ & \quad + B_{12} B_{23} (B_{11} - B_{33}) + B_{31} (B_{23}^2 - B_{12}^2) \} = 0. \end{aligned} \right.$$

Man erhält drei Werthe für $\operatorname{tg} \psi$, weil man die neuen Symmetriexen zunächst in beliebiger Reihenfolge mit x, y, z bezeichnen kann. Verfährt man aber bei der Bezeichnung nach dem oben erwähnten Principe, so ist ψ vollständig (bis auf $\pm \pi$) bestimmt. Aus dem so erhaltenen Werthe von ψ ergibt sich ϑ mittelst der Formel:

$$(9) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{B_{31} \sin \psi - B_{33} \cos \psi}{\frac{1}{2} (B_{22} - B_{11}) \sin 2\psi + B_{12} \cos 2\psi}.$$

Schliesslich kann man aus der dritten der Gleichungen (6) folgende Gleichung für $\operatorname{tg} 2\varphi$ ableiten:

$$(10) \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\cos \vartheta \{ (B_{11} - B_{22}) \sin 2\psi - 2 B_{12} \cos 2\psi \} + 2 \sin \vartheta \{ B_{23} \cos \psi - B_{31} \sin \psi \}}{\cos^2 \vartheta \{ B_{11} \cos^2 \psi + B_{22} \sin^2 \psi - B_{23}^2 + B_{12}^2 \sin 2\psi \} - \sin 2\vartheta \{ B_{23} \sin \psi + B_{31} \cos \psi \} + B_{12} \sin 2\psi - B_{11} \sin^2 \psi - B_{22} \cos^2 \psi + B_{11}}$$

durch welche φ bis auf $\pm \frac{1}{2} \pi$ bestimmt ist; man hat denjenigen Werth von φ zu wählen, für welchen bei verschwindender Deformation $\varphi - \psi = \pi$ wird. Die Berechnung von ψ, ϑ, φ lässt sich übrigens in vielen Fällen bedeutend vereinfachen, wie weiter unten gezeigt werden wird.

Nachdem ψ, ϑ, φ und damit $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ gefunden sind, erhält man $\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2$, indem man die Gleichungen (4) mit dem Factorensystem

$$\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, 2\alpha_2\alpha_3, 2\alpha_3\alpha_1, 2\alpha_1\alpha_2$$

und den beiden analogen multiplicirt und addirt. Auf diese Weise ergeben sich folgende Formeln für die Hauptlichtgeschwindigkeiten nach der Deformation:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_x^2 &= B_{11} \alpha_1^2 + B_{22} \alpha_2^2 + B_{33} \alpha_3^2 + 2 B_{23} \alpha_2 \alpha_3 + 2 B_{31} \alpha_3 \alpha_1 + 2 B_{12} \alpha_1 \alpha_2, \\ \omega_y^2 &= B_{11} \beta_1^2 + B_{22} \beta_2^2 + B_{33} \beta_3^2 + 2 B_{23} \beta_2 \beta_3 + 2 B_{31} \beta_3 \beta_1 + 2 B_{12} \beta_1 \beta_2, \\ \omega_z^2 &= B_{11} \gamma_1^2 + B_{22} \gamma_2^2 + B_{33} \gamma_3^2 + 2 B_{23} \gamma_2 \gamma_3 + 2 B_{31} \gamma_3 \gamma_1 + 2 B_{12} \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (6) erhält man auch, wenn man die Ovaloidgleichung (3) auf das zunächst unbekannte Coordinatensystem x, y, z transformirt und die Factoren von $2\nu\pi, 2\pi\mu, 2\mu\nu$ gleich Null setzt; die Ausdrücke (11) sind die Coëfficienten von μ^2, ν^2, π^2 in der so transformirten Ovaloidgleichung. Demnach transformiren sich die Grössen $B_{11}, \dots B_{23}, \dots$ genau ebenso, wie die elastischen Druckkräfte $X_x, \dots Y_z, \dots$.

Man kann die Richtung und Grösse der Hauptaxen des neuen Ovaloids aus dessen Gleichung:

$\varrho^2 = B_{11}\mu^0 + B_{22}\nu^0 + B_{33}\pi^0 + 2B_{23}\nu^0\pi^0 + 2B_{31}\pi^0\mu^0 + 2B_{12}\mu^0\nu^0$
auch in der Weise bestimmen, dass man die Maxima und Minima von ϱ^2 aufsucht. Dies führt zunächst auf die Gleichungen:

$$\frac{B_{11}\mu^0 + B_{12}\nu^0 + B_{31}\pi^0}{\mu^0} = \frac{B_{12}\mu^0 + B_{22}\nu^0 + B_{23}\pi^0}{\nu^0} = \frac{B_{31}\mu^0 + B_{23}\nu^0 + B_{33}\pi^0}{\pi^0} = \omega^2,$$

woraus sich nachstehende cubische Gleichung für die Quadrate der halben Hauptaxen $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ergibt:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} B_{11} - \omega^2 & B_{12} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} - \omega^2 & B_{23} \\ B_{31} & B_{23} & B_{33} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind die Wurzeln derselben ($\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2$) berechnet, so hat man zur Bestimmung der Richtungscosinus $\alpha_1, \dots \gamma_3$ drei Systeme von je drei linearen Gleichungen von der Form:

$$(13) \quad \begin{cases} B_{11}\mu^0 + B_{12}\nu^0 + B_{31}\pi^0 = \mu^0\omega^2, \\ B_{12}\mu^0 + B_{22}\nu^0 + B_{23}\pi^0 = \nu^0\omega^2, \\ B_{31}\mu^0 + B_{23}\nu^0 + B_{33}\pi^0 = \pi^0\omega^2. \end{cases}$$

Setzt man in denselben

$$\omega^2 = \omega_x^2, \quad \omega_y^2, \quad \omega_z^2,$$

so wird

$$\mu^0 = \alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \nu^0 = \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2, \quad \pi^0 = \alpha_3, \quad \beta_3, \quad \gamma_3.$$

Näherungsformeln zur Bestimmung der Richtungen der optischen Symmetrieaxen in deformirten zweiaxigen Krystallen. Es ist von vornherein wahrscheinlich, dass die Grössen B_{23}, B_{31}, B_{12} immer von derselben Grössenordnung sein werden, wie $B_{11} - \omega_x^2, B_{22} - \omega_y^2, B_{33} - \omega_z^2$. Nun sind aber die Aenderungen der Lichtgeschwindigkeiten, welche man durch starken Druck hervorbringen vermag, nach allen bisherigen Erfahrungen immer noch

sehr klein gegen die Differenzen der Hauptlichtgeschwindigkeiten in doppeltbrechenden Krystallen, selbst in solchen mit sehr schwacher Doppelbrechung; daher sind auch die Grössen $B_{11} - \omega_x^{02}$, $B_{22} - \omega_y^{02}$, $B_{33} - \omega_z^{02}$, B_{23} , B_{31} , B_{12} als sehr klein gegen $\omega_x^{02} - \omega_y^{02}$, $\omega_y^{02} - \omega_z^{02}$, $\omega_z^{02} - \omega_x^{02}$ oder auch gegen $B_{11} - B_{22}$, $B_{22} - B_{33}$, $B_{33} - B_{11}$ zu betrachten. Behält man in der Gl. (8) für $\text{tg } \psi$ nur die Grössen erster Ordnung bei, so erhält man:

$$\text{tg } \psi = \frac{B_{23}}{B_{31}} \cdot \frac{B_{11} - B_{33}}{B_{22} - B_{33}} \quad \text{oder} \quad = \frac{B_{23}}{B_{31}} \cdot \frac{\omega_x^{02} - \omega_z^{02}}{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}};$$

ferner folgt dann aus (9):

$$\text{tg } \vartheta = \sqrt{\left(\frac{B_{23}}{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}}\right)^2 + \left(\frac{B_{31}}{\omega_x^{02} - \omega_z^{02}}\right)^2},$$

und aus (10):

$$\text{tg } 2\varphi = \text{tg} \left(2\psi - \arctg \frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}} \right),$$

$$\text{tg } 2(\psi - \varphi) = \frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}} \quad \text{oder auch} \quad \text{tg } 2(\pi + \psi - \varphi) = \frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}}.$$

Es ist $\pi + \psi - \varphi$ die Drehung um die z^0 -Axe in positivem Sinne, welche das optische Symmetrieaxensystem durch die Deformation erleidet; diese Drehung werde mit Φ_z , ebenso die Drehungen um die x^0 -, resp. y^0 -Axe mit Φ_x , resp. Φ_y bezeichnet. Dann gelten die Formeln:

$$(14) \quad \text{tg } 2\Phi_x = \frac{2B_{23}}{B_{22} - B_{33}}, \quad \text{tg } 2\Phi_y = \frac{2B_{31}}{B_{33} - B_{11}}, \quad \text{tg } 2\Phi_z = \frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}},$$

und zwar streng, wenn die x^0 -, resp. die y^0 - oder die z^0 -Axe bei der Deformation eine Symmetrieaxe bleibt, dagegen in erster Näherung für alle optisch zweiaxigen Krystalle. Bei letzteren kann man auch in den Nennern ω_x^{02} , ω_y^{02} , ω_z^{02} statt B_{11} , B_{22} , B_{33} schreiben und die Bogen statt der Tangenten setzen; die Drehungswinkel sind dann also dem Drucke nahezu proportional, da ja B_{23} , B_{31} , B_{12} lineare Functionen des Druckes sind. Man erhält in dem letzteren Falle für die Richtungscosinus $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ folgende Näherungsformeln:

$$(14') \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1, \\ \alpha_2 = -\beta_1 = \frac{B_{12}}{\omega_x^{02} - \omega_y^{02}}, \quad -\alpha_3 = \gamma_1 = \frac{B_{31}}{\omega_z^{02} - \omega_x^{02}}, \\ \beta_3 = -\gamma_2 = \frac{B_{23}}{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}}, \end{array} \right.$$

und die Quadrate der neuen Hauptlichtgeschwindigkeiten sind bis auf Grössen zweiter Ordnung durch die Grössen B_{11} , B_{22} , B_{33} selbst gegeben.

Bei optisch einaxigen Krystallen, deren Hauptaxe die z^0 -Axe ist, sind nur die Näherungsformeln für Φ_x und Φ_y anwendbar.

Bemerkung über absorbirende Krystalle. Durch die im Vorhergehenden aufgestellten Formeln wird sich wahrscheinlich auch die Aenderung der optischen Eigenschaften absorbirender Krystalle infolge elastischer Deformation darstellen lassen. Denn Hr. Drude hat in seiner Inauguraldissertation¹⁾ gezeigt, dass sich die Gesetze für die Fortpflanzung ebener Wellen mit in der Wellenebene constanter Amplitude in absorbirenden krystallinischen Medien durch dieselben Formeln darstellen lassen, wie in durchsichtigen krystallinischen Medien, wenn man complexe Grössen einführt. Es werden dann ω_x^{02} , ω_y^{02} , ω_z^{02} complexe Grössen, ebenso alle Richtungscosinus, da das „ursprüngliche Symmetriexensystem“ x^0 , y^0 , z^0 und um so mehr das Coordinatensystem x , y , z (im Allgemeinen) nicht mehr reell ist. Ferner sind in dem Ansätze (5) die Constanten a_{hk} complex zu nehmen, und es werden somit auch die Grössen B_{11} , \dots , B_{23} , \dots complex; die letzteren entsprechen den von Hrn. Drude mit α_{11} , \dots , α_{23} , \dots bezeichneten Grössen. Bei monoklinen und triklinen Krystallen, wo das Axensystem x^0 , y^0 , z^0 nicht reell ist, werden natürlich auch die auf dasselbe bezogenen „Deformationsgrössen“ x_x , \dots , y_x , \dots complex; denn dieselben sind aus den gegebenen reellen Deformationsgrössen mittelst der gewöhnlichen Transformationsformeln, in welche die von Hrn. Drude mit ϵ , η , ζ bezeichneten complexen „Richtungscosinus“ einzuführen sind, zu berechnen. Nachdem aus den Formeln (6) bis (11) oder (12) und (13) die complexen Richtungscosinus der neuen imaginären Symmetriexen und die neuen Grössen $\omega_x^2 = A_1$, $\omega_y^2 = A_2$, $\omega_z^2 = A_3$ berechnet sind, kann man mit Hülfe der von Hrn. Drude gegebenen Formeln (25) bis (27) für eine gegebene Richtung im deformirten Krystall die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der zu ihr senkrechten ebenen Wellen und die zugehörigen Absorptionscoëfficienten bestimmen.

1) P. Drude, Wied. Ann. 32. p. 584. 1887.

Ein näheres Eingehen auf diesen Gegenstand bietet indessen wohl wenig Interesse, da noch keine anderen Beobachtungen über die Aenderung der Absorption durch Druck oder Zug vorhanden zu sein scheinen, als die in der Einleitung erwähnten von Hrn. Kundt an Kautschuk, von Hrn. v. Lasaulx an Silberhaloiden und von Hrn. v. Seherr-Thoss (sowie früher von Brewster und Haidinger) an dünnen Schichten breiartiger Farbstoffe, und da es sich in allen diesen Fällen um Deformationen handelte, auf welche die Elasticitätstheorie nicht anwendbar ist. Die Versuche, in gefärbtem Glase durch Compression Dichroismus hervorzubringen, sind bisher vergeblich gewesen. Uebrigens hat man auch zur Nachweisung geringer Aenderungen der Absorption kein annähernd so feines Hilfsmittel, wie zur Bestimmung geringer Geschwindigkeitsänderungen.

2. Reduction der Anzahl der Constanten a_{hk} für die einzelnen Krystallsysteme.

Die Ausdrücke (5) für $B_{11}, \dots B_{23}, \dots$ enthalten 36 verschiedene Constanten a_{hk} ; diese Anzahl lässt sich im Allgemeinen, d. h. für triklone Krystalle, nicht auf eine geringere reduciren; wenigstens ist es mir nicht gelungen, einen Grund aufzufinden, aus welchem sich, analog wie bei den Elasticitätsconstanten aus dem Vorhandensein eines Potentials für die elastischen Druckkräfte, die Gleichheit von a_{hk} und a_{kh} schliessen liesse.

Für die Krystallsysteme mit Symmetrieaxen ergibt sich eine Reduction der Anzahl der Constanten daraus, dass die Grössen $B_{11} - \omega_x^{02}, \dots B_{23}, \dots$ bezogen auf zwei gleichwerthige, durch eine Drehung von $2\pi/n$ ($n = 2, 3, 4, 6$) um eine n -zählige Symmetrieaxe in einander übergehende Coordinatensysteme, sich in gleicher Weise durch die auf dasselbe Coordinatensystem bezogenen Grössen $x, \dots y, \dots$ ausdrücken müssen.

Monoklines System. Es ist eine zweizählige Symmetrieaxe vorhanden; dieselbe werde zur x^0 -Axe gewählt. Bei einer Drehung von π um diese Axe bleiben x, y, z, y, z ungeändert, z und x wechseln das Vorzeichen. Ferner folgt aus den Formeln (4), dass $B_{11} - \omega_x^{02}$, $B_{22} - \omega_y^{02}$, $B_{33} - \omega_z^{02}$ und B_{23} .

ungeändert bleiben, hingegen B_{31} und B_{12} in $-B_{31}$ und $-B_{12}$ übergehen. Hieraus ergibt sich, dass folgende Constanten des Ansatzes (5) verschwinden müssen:

$a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45}, a_{16}, a_{26}, a_{36}, a_{46}, a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{61}, a_{62}, a_{63}, a_{64}$,
sodass man erhält:

$$(15) \quad \begin{cases} B_{11} - \omega_x^0 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z, \\ B_{22} - \omega_y^0 = a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_z + a_{24}y_z, \\ B_{33} - \omega_z^0 = a_{31}x_x + a_{32}y_y + a_{33}z_z + a_{34}y_z, \\ B_{23} = a_{41}x_x + a_{42}y_y + a_{43}z_z + a_{44}y_z, \end{cases} \quad \begin{aligned} B_{31} &= a_{55}z_z + a_{56}x_y, \\ B_{12} &= a_{65}z_z + a_{66}x_y. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten nur für eine bestimmte Farbe, da sowohl die Lage der y^0 - und z^0 -Axe, als die Constanten a_{ik} von der Wellenlänge abhängen können.

Rhombisches System. Hier sind auch die y^0 - und z^0 -Axe zweizählige Symmetrieachsen; daraus ergibt sich durch eine der obigen analoge Erwägung, dass auch noch die 8 Constanten $a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{56}, a_{66}$ verschwinden müssen, sodass folgender Ansatz mit 12 Constanten resultirt:

$$(16) \quad \begin{cases} B_{11} - \omega_x^0 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z, & B_{23} = a_{44}y_z, \\ B_{22} - \omega_y^0 = a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_z, & B_{31} = a_{55}z_z, \\ B_{33} - \omega_z^0 = a_{31}x_x + a_{32}y_y + a_{33}z_z, & B_{12} = a_{65}x_y. \end{cases}$$

Tetragonales System. Die vierzählige Symmetrieaxe sei die z^0 -Axe, zwei von den zu ersterer senkrechten zweizähligen Symmetrieachsen seien die x^0 - und y^0 -Axe. Dann gelten zunächst die Formeln (16), in denen sich aber die Zahl der verschiedenen a_{hk} vermittelt der oben erwähnten Schlussweise, angewandt auf eine Drehung von $\pi/2$ um die z^0 -Axe, vermindern lässt. Es wurde schon im ersten Abschnitte erwähnt, dass sich die Grössen $B_{11}, \dots, B_{23}, \dots$ bei einer beliebigen Drehung des Coordinatensystems gerade so transformiren, wie die elastischen Druckkräfte X_x, \dots, Y_z, \dots . Im vorliegenden Falle gilt nun dasselbe für $B_{11} - \omega_x^0, B_{22} - \omega_y^0, B_{33} - \omega_z^0, B_{23}, B_{31}, B_{12}$, weil die tetragonalen Krystalle optisch einaxig sind und somit $\omega_x^0 = \omega_y^0$ ist. Da nun diese Grössen auch ebenso wie die elastischen Druckkräfte durch x_x, \dots, y_z, \dots ausgedrückt sind, so findet hier ganz dieselbe Rechnung Anwendung, welche zur Reduction der Anzahl der Elasticitätsconstanten dient und z. B.

in Neumann's Vorlesungen über Elasticitätstheorie durchgeführt ist.¹⁾ Es ergeben sich die Relationen:

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad a_{23} = a_{13}, \quad a_{32} = a_{31}, \quad a_{55} = a_{44},$$

sodass für tetragonale Krystalle folgende Formeln mit 7 Constanten gelten:

$$(17) \quad \begin{cases} B_{11} - \omega_x^0 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z, & B_{23} = a_{44}y_z, \\ B_{22} - \omega_x^0 = a_{12}x_x + a_{11}y_y + a_{13}z_z, & B_{31} = a_{44}z_x, \\ B_{33} - \omega_x^0 = a_{13}x_x + a_{12}y_y + a_{11}z_z, & B_{12} = a_{66}x_y. \end{cases}$$

Reguläres System. Da bei diesem die x^0 - und y^0 -Axe der z^0 -Axe gleichwerthig sind, so muss $a_{13} = a_{31} = a_{12}$, $a_{33} = a_{11}$, $a_{66} = a_{44}$ sein, folglich, da auch $\omega_z^0 = \omega_x^0 = \omega^0$ wird:

$$(18) \quad \begin{cases} B_{11} - \omega^0 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{12}z_z = (a_{11} - a_{12})x_x + a_{12}\Delta, \\ B_{22} - \omega^0 = a_{12}x_x + a_{11}y_y + a_{12}z_z = (a_{11} - a_{12})y_y + a_{12}\Delta, \\ B_{33} - \omega^0 = a_{12}x_x + a_{12}y_y + a_{11}z_z = (a_{11} - a_{12})z_z + a_{12}\Delta, \\ B = a_{44}y_z, \quad B_{31} = a_{44}z_x, \quad B_{12} = a_{44}x_y, \end{cases}$$

wo Δ die cubische Dilatation ($x_x + y_y + z_z$) bedeutet.

Bei unkrystallinischen Körpern müssen die Ausdrücke für $B_{11}, \dots, B_{23}, \dots$ bei irgend einer Drehung des Coordinatensystems unverändert bleiben; daraus folgt, dass die Relation:

$$a_{44} = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})$$

bestehen muss. Zwischen a_{11} , a_{12} und den Neumann'schen Grössen p , q besteht der Zusammenhang:

$$a_{11} = 2\omega^0 q, \quad a_{12} = 2\omega^0 p.$$

Hexagonales System. Die z^0 -Axe sei die sechszählige Symmetrieaxe, die x^0 -Axe eine zweizählige Symmetrieaxe der einen Art, die y^0 -Axe die darauf senkrechte der anderen Art. Es gilt dann zunächst der Ansatz (16). Bei einer Drehung des Coordinatensystems von $\pi/3$ um die z^0 -Axe müssen diese Gleichungen ungeändert bleiben; es gilt hier (und beim rhomboëdrischen Systeme) dasselbe, was beim tetragonalen System gesagt wurde, und die Rechnung findet sich in § 83 der Neumann'schen Vorlesung. Es ergeben sich folgende Formeln mit 6 verschiedenen Constanten:

1) Cf. Vorlesungen über die Theorie der Elasticität von F. Neumann, herausgegeben von O. E. Meyer. § 81.

$$19) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{11} - \omega_x^{02} = a_{11}x_x + a_{13}y_y + a_{13}z_z, \\ B_{22} - \omega_x^{02} = a_{12}x_x + a_{11}y_y + a_{13}z_z, \\ B_{33} - \omega_x^{02} = a_{31}x_x + a_{31}y_y + a_{33}z_z, \\ B_{23} = a_{44}y_z, \quad B_{31} = a_{44}z_x, \quad B_{12} = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})x_y. \end{array} \right.$$

Alle gegen die Hauptaxe gleich geneigten Richtungen sind hier gleichwerthig.

Rhomboëdrisches System. Die z^0 -Axe sei die Hauptaxe, welche eine dreizählige Symmetrieaxe ist, die x^0 -Axe eine der zweizähligen Symmetrieaxen; die y^0 -Axe ist dann keine Symmetrieaxe, man muss daher von den Formeln (15) ausgehen. Stellt man die Bedingungen dafür auf, dass bei einer Drehung von $2\pi/3$ um die z^0 -Axe die Form jener Gleichungen unverändert bleibt, so ergeben sich die Relationen¹⁾:

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad a_{23} = a_{13}, \quad a_{32} = a_{31}, \quad a_{44} = a_{55}, \quad a_{66} = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12}), \\ a_{24} = -a_{11}, \quad a_{42} = -a_{41}, \quad a_{43} = a_{34} = 0, \quad a_{56} = a_{41}, \quad a_{65} = a_{14},$$

folglich bleiben 8 verschiedene Constanten übrig, und es wird:

$$20) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{11} - \omega_x^{02} = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z, \\ B_{22} - \omega_x^{02} = a_{12}x_x + a_{11}y_y + a_{13}z_z - a_{14}y_z, \\ B_{33} - \omega_x^{02} = a_{31}x_x + a_{31}y_y + a_{33}z_z, \\ B_{23} = a_{41}x_x - a_{41}y_y + a_{44}y_z, \\ B_{31} = a_{44}z_x + a_{41}x_y, \\ B_{12} = a_{14}z_x + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})x_y. \end{array} \right.$$

Anmerkung. Die in den beiden vorhergehenden Abschnitten entwickelten Formeln sind auch anwendbar zur mathematischen Behandlung der Aenderung der Wärmeleitungsfähigkeit krystallinischer Körper durch elastische Deformationen²⁾; an Stelle von ω_x^2 , ω_y^2 , ω_z^2 treten dann die Hauptwärmeleitungscoefficienten k_1 , k_2 , k_3 . (Man gelangt zu diesem Resultate, indem man für die Coefficienten in der Differentialgleichung der Wärmeleitung, d. h. für die Grössen B_{11} , ... B_{23} , ... lineare Functionen der Deformationen x_x , ... y_z , ... einführt.)

1) Vgl. F. Neumann, l. c. § 84; dort ist die y Axe eine zweizählige Symmetrieaxe.

2) Eine solche Aenderung ist von Sénarmont an Glas und Porzellan nachgewiesen worden. Ann. de chim. et de phys. (3) 23, p. 257.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVII

3. Verschiedene Coordinatensysteme von physikalischer Bedeutung.

Wenn man in den Gleichungen (6) bis (11) oder (12) und (13) die Grössen:

$B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{23}, B_{31}, B_{12}, \omega^2$ (oder ρ^2)
resp. durch $(1+x_x)^2, (1+y_y)^2, (1+z_z)^2, y_x, z_x, x_y, (1+\lambda)^2$
ersetzt, so bestimmen jene Gleichungen die Richtungen der Hauptdilatationsachsen und die Hauptdilatationen $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$.

Damit nun die Gleichungen (6) mit den aus ihnen durch die vorstehende Substitution erhaltenen identisch werden, müssen die Ausdrücke für $B_{11}, \dots B_{23}, \dots$ die Form haben:

$$B_{11} = \omega^2 + a_1 x_x + a_2 A, \quad B_{22} = \omega^2 + a_1 y_y + a_2 A, \quad B_{33} = \omega^2 + a_1 z_z + a_2 A, \\ B_{23} = \frac{1}{2} a_1 y_x, \quad B_{31} = \frac{1}{2} a_1 z_x, \quad B_{12} = \frac{1}{2} a_1 x_y$$

Hieraus folgt, dass das optische Symmetrieaxensystem nach einer beliebigen Deformation mit dem Hauptdilatationsaxensystem nur bei unkrystallinischen Körpern zusammenfällt.

Ein anderes Coordinatensystem, welches physikalische Bedeutung besitzt, wird durch die Formeln (6) bestimmt, wenn man in denselben $B_{11} - \omega_x^2, B_{22} - \omega_y^2, B_{33} - \omega_z^2$ an Stelle von B_{11}, B_{22}, B_{33} setzt. Nimmt man nämlich an, dass durch die Deformation analoge Wechselwirkungen zwischen den ponderablen Moleculen und Aethertheilchen hervorgerufen werden, wie diejenigen, welche Hr. Voigt in seiner „Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Medien“¹⁾ als in natürlichen doppeltbrechenden Körpern wirksam annimmt, so muss es auch ein Coordinatensystem x', y', z' geben, in Bezug auf welches die Differentialgleichungen der Aetherschwingungen beim Vorhandensein der durch die Deformation erregten Kräfte allein die Form annehmen würden:

$$I \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = A'_{11} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + A'_{12} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + A'_{13} \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + \frac{\partial L'}{\partial x'}, \\ I \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = A'_{21} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + A'_{22} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + A'_{23} \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \frac{\partial L'}{\partial y'}, \\ I \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = A'_{31} \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + A'_{32} \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + A'_{33} \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} + \frac{\partial L'}{\partial z'},$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 885. 1883.

d. h. eine analoge Form, wie die auf das optische Symmetrieaxensystem bezogenen Differentialgleichungen für ein natürliches doppeltbrechendes Medium. Je nachdem man die Fresnel'sche oder die Neumann'sche Annahme über die Schwingungsrichtung macht, sind die Relationen:

oder $A_{13}' = A_{13}' = A_{11}'$
 $A_{11}' = A_{12}' + A_{13}' - A_{23}'$ und $A_{23}' = A_{32}'$
 und die analogen einzuführen. In beiden Fällen findet man durch Transformation der Differentialgleichungen, dass sich die Bestimmungsstücke des Ovaloids nach der Deformation folgendermaassen darstellen:

$$B_{11} = \frac{1}{I} \{ A_{23}' \alpha_1'^2 + A_{31}' \beta_1'^2 + A_{12}' \gamma_1'^2 \},$$

.....

$$B_{23} = \frac{1}{I} \{ A_{23}' \alpha_2' \alpha_3' + A_{31}' \beta_2' \beta_3' + A_{12}' \gamma_2' \gamma_3' \},$$

.....

worin $A_{23} = \Gamma \omega_x^{02} \dots$ ist und $\alpha_1', \dots \gamma_3'$ die Richtungscosinus der Axen x', y', z' in Bezug auf das Axensystem x^0, y^0, z^0 bezeichnen. Vergleicht man diese Ausdrücke mit denjenigen unter (4), so erkennt man sofort, dass für die Richtungscos. $\alpha_1', \dots \gamma_3'$ Gleichungen gelten, welche sich von den Gl. (6) nur dadurch unterscheiden, dass $B_{11} - \omega_x^{02}$, $B_{22} - \omega_y^{02}$, $B_{33} - \omega_z^{02}$ an Stelle von B_{11} , B_{22} , B_{33} stehen. Das durch diese Gleichungen, also durch:

$$(21) \quad 0 = (B_{11} - \omega_x^{02}) \beta_1' \gamma_1' + (B_{22} - \omega_y^{02}) \beta_2' \gamma_2' + \dots + B_{23} (\beta_2' \gamma_3' + \beta_3' \gamma_2') + \dots$$

und die zwei analogen, bestimmte Axensystem x', y', z' kann vielleicht als das „Symmetrieaxensystem für die durch die Deformation erregten Wechselwirkungen zwischen den ponderablen Moleculen und Aethertheilchen“ bezeichnet werden.

Dasselbe fällt mit dem Hauptdilationsaxensystem nur dann zusammen, wenn die Gleichungen (5) die specielle Form haben:

$$B_{11} - \omega_x^{02} = a_1 x_2 + a_2 A, \quad \dots, \quad B_{23} = \frac{a_1}{2} y_2, \quad \dots,$$

also nothwendiger Weise ebenfalls nur für unkrystallinische Körper, bei denen es zugleich mit dem Axensystem x, y, z identisch ist. (Letztere Identität ist überhaupt vorhanden, wenn $\omega_x^0 = \omega_y^0 = \omega_z^0$ ist, also auch für reguläre Krystalle.)

Damit das Axensystem x', y', z' mit dem Hauptdruckaxensystem zusammenfiele, — was indessen von vornherein unwahrscheinlich ist —, müssten die Constanten a_{hk} den Elasticitätsconstanten c_{hk} mit entsprechenden Indices proportional sein.

II. Experimenteller Theil.

1. Die Beobachtungsmethoden.

A. Compressionsapparat. Um für einige krystallinische Körper die Constanten a_{hk} zu bestimmen und die Theorie zu prüfen, wurden rechtwinklige Parallelepipeda (von 13 mm Länge und 2 bis 5 mm Breite und Dicke) aus den zu untersuchenden Substanzen vermittelst eines im Folgenden zu beschreibenden einfachen Apparates einem einseitigen Drucke unterworfen. Der Apparat bestand aus einem einarmigen Hebel aus Stahl von etwa 1 cm Breite und Dicke und 13 cm Länge, welcher um zwei in einem Messingklotze befestigte Spitzen drehbar war. Dieser Messingklotz diente in seinem horizontalen Theile als Unterlage der unter den Hebel gestellten Krystallprismen und war selbst auf einem Klotze von Eichenholz derart festgeschroben, dass das freie Ende des Hebels über den letzteren hinausragte und also durch angehängte Gewichte belastet werden konnte. Die Krystallprismen wurden unter einen der Drehaxe parallelen Einschnitt auf der Unterseite des Hebels gestellt, dessen Abstand von der Drehaxe sich zu dem Hebelarme, an welchem die Belastung wirkte, wie 29,5:120 verhielt. In den erwähnten Einschnitt wurde zunächst ein dachförmiges Stahlstück eingesetzt, unter dessen horizontale untere Fläche eine 1 bis 2 mm dicke Platte von Zinn oder bei geringen Belastungen von Blei gelegt und hierunter erst das Krystallprisma gestellt, dessen unmittelbare Unterlage ebenfalls von einer Zinn- oder Bleiplatte gebildet wurde. Durch diese Vorrichtung sollte eine möglichst gleichmässige Vertheilung des Druckes bewirkt werden; allein es liess sich doch nicht vermeiden, dass die Compression an den beiden Rändern der Krystallplatte oft erheblich verschieden war. Später wurde daher (beim Quarz) eine andere Art der Aufstellung angewendet, welche sich besser bewährte. Dieselbe bestand darin, dass auf die beiden Endflächen des Krystallprismas kleine

Stahlstücke von gleichem Querschnitte, wie das Prisma, aufgekittet wurden, von denen das eine in einer Schneide, das andere in einer Spitze endigte; letztere wurde in den Einschnitt des Hebels eingesetzt. Um die etwa vorhandenen Unebenheiten auszugleichen, waren zwischen die Endflächen des Krystallprismas und die Stahlstücke dicke Stanniolblättchen gelegt.

Da die Aufstellung der Krystallprismen aus freier Hand geschah, so war es schwierig, die Längsaxe genau vertical und die eine Seitenfläche senkrecht zu den hindurchgehenden Lichtstrahlen zu stellen. Die richtige Stellung jener Seitenfläche wurde an dem reflectirten Bilde eines in der horizontalen Sehlinie angebrachten Diaphragmas erkannt. Die geringe Neigung der Längsrichtung der Krystallprismen gegen die Verticale, welche nicht zu vermeiden war, namentlich da sie bisweilen während der Beobachtungen entstand, kann übrigens keine erheblichen Fehler zur Folge gehabt haben, da in denjenigen Fällen, wo dies zu befürchten war, besondere Maassregeln zur Aufhebung dieses Fehlers getroffen wurden. Ausserdem bestand doch immer eine gewisse Unsicherheit darüber, ob die Druckrichtung wirklich genau vertical war.

Beobachtet wurden: 1. mit Hülfe eines Babinet'schen Compensators die relative Verzögerung, welche die beiden in der Beobachtungsrichtung, d. h. horizontal und senkrecht zur Längsrichtung des Hebels, durch die Krystallprismen hindurchgehenden Strahlen bei der Compression erfuhren, 2. mittelst der Fresnel-Arago'schen, auf der Verschiebung von Beugungstreifen beruhenden Methode die absoluten Verzögerungen jener Strahlen, 3. durch Einstellung des polarisirenden und analysirenden Nicols die Lage der Schwingungsrichtungen in den comprimirten Prismen, 4. in einigen Fällen (besonders bei der senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Quarzplatte) die Aenderungen der Interferenzcurven im convergenten polarisirten Lichte.

B. Beobachtungen der relativen Verzögerungen. Als Polarisator diente ein an der Hinterseite des Holzklotzes befestigtes, sehr grosses Nicol'sches Prisma, welches mit einem Theilkreise, an dem 6' abgelesen werden konnten, um eine horizontale, den einfallenden Lichtstrahlen parallele Axe dreh-

bar war; der Analysator wurde von einem kleineren, in einem an der Vorderseite des Klotzes befestigten Theilkreise drehbaren Nicol gebildet. Dieser Polarisator und Analysator wurden auch bei den Beobachtungen der Schwingungsrichtungen benutzt. Zwischen dem Polarisator und dem Hebel wurde in einem Abstände von etwa 15 cm vom Analysator auf dem Holzklotze der Compensator befestigt; letzterer war ein Babinet'scher Compensator der älteren Construction, d. h. er bestand nur aus zwei entgegengesetzt liegenden Quarzkeilen. Einer der schwarzen Streifen, welche bei gekreuzten oder parallelen Nicols im homogenen Lichte das Gesichtsfeld des in deutlicher Schweite befindlichen Compensators durchzogen, wurde auf die Mitte eines schmalen verticalen Spaltes eingestellt, welcher von zwei vor der Oeffnung des Compensators verschiebbaren Blechen begrenzt wurde. Da die schwarzen Streifen nicht genau parallel den Spalträndern waren, so musste bei jeder Beobachtungsreihe eine bestimmte, durch einen horizontalen feinen Draht bezeichnete Stelle des Spaltes fixirt werden. Bei diesen Beobachtungen wurde, wo nichts über die Lichtsorte angegeben ist, stets Natriumlicht angewandt; dem Abstände zweier benachbarter schwarzer Streifen, also dem Gangunterschiede von einer Wellenlänge ($= 589,2 \cdot 10^{-6}$ mm), entsprachen dann 23,77 Umdrehungen der die Quarzkeile gegeneinander verschiebenden Mikrometerschraube, deren Trommel in 100 Theile getheilt war. Die Einstellung des schwarzen Streifens war, wenn derselbe völlig scharf erschien, etwa bis auf zwei Trommeltheile genau; wenn aber eine doppeltbrechende Krystallplatte vor dem Compensator stand, durch welche die Schärfe des Streifens meistens sehr beeinträchtigt wurde, so war die Genauigkeit erheblich geringer. — Die Nicols wurden so gestellt, dass ihre Polarisations Ebenen gegen die Verticalebene unter $\pm 45^\circ$ geneigt und zu einander entweder senkrecht oder parallel waren. Wenn die Schwingungsrichtungen im Compensator genau mit denjenigen in dem comprimierten Krystallprisma zusammenfallen, so ist die durch die Compression erzeugte relative Verzögerung A , in Theilen einer ganzen Wellenlänge ausgedrückt, d. i. die beobachtete Verschiebung des Compensatorstreifens dividirt durch den Streifenabstand, durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$A = D \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - D^0 \left(\frac{1}{\lambda_1^0} - \frac{1}{\lambda_2^0} \right),$$

oder, wenn $\omega_1 + \omega_1^0 = 2\omega_1^0$, $\omega_2 + \omega_2^0 = 2\omega_2^0$ gesetzt, also $\omega_1 - \omega_1^0$ gegen ω_1^0 , $\omega_2 - \omega_2^0$ gegen ω_2^0 vernachlässigt wird:

$$(22) \quad A = \frac{D^0 p}{2\lambda} \left\{ \frac{\omega_1^0{}^2 - \omega_1^2}{p v^3} n_1^0{}^3 - \frac{\omega_2^0{}^2 - \omega_2^2}{p v^3} n_2^0{}^3 \right\} + \frac{D - D^0}{\lambda} (n_1^0 - n_2^0).$$

Darin bezeichnet p den ausgeübten Druck, bezogen auf 1 qmm, v , λ die Lichtgeschwindigkeit und Wellenlänge in Luft, ω_1^0 , λ_1^0 und ω_2^0 , λ_2^0 die Geschwindigkeiten und Wellenlängen der beiden in der Beobachtungsrichtung durch das Krystallprisma hindurchgehenden Wellen vor der Compression, ω_1 , λ_1 und ω_2 , λ_2 dieselben Grössen nach der Compression, n_1^0 und n_2^0 die ursprünglichen Brechungscoëfficienten jener beiden Wellen, D^0 und D die Dicke des Krystallprismas in der Beobachtungsrichtung vor resp. nach der Compression. — Wenn aber die Schwingungsrichtungen im Krystallprisma von denjenigen im Compensator um einen kleinen Winkel ε abweichen, so ist obiger Ausdruck A nicht direct gleich der am Compensator beobachteten Verzögerung A' , sondern es ist, wie die Rechnung ergibt, näherungsweise:

$$A = A' + \frac{2\varepsilon \sin A'}{\sin 2\varphi},$$

wobei φ den Winkel zwischen der Schwingungsrichtung im Polarisator und der horizontalen Schwingungsrichtung im Compensator bedeutet. Den durch diese Abweichung der Schwingungsrichtungen entstehenden Fehler kann man nun dadurch eliminiren, dass man jede Beobachtung wiederholt, nachdem man den Polarisator und Analysator um 90° gedreht hat, und aus den beiden beobachteten Werthen von A' das Mittel nimmt; denn hierbei fällt das Glied $2\varepsilon \sin A' / \sin 2\varphi$, welches in beiden Fällen nahezu gleichen absoluten Werth und entgegengesetztes Vorzeichen hat, fort, und man erhält also sehr annähernd den wahren Werth von A . — Ueber die Beobachtungen selbst ist noch Folgendes zu bemerken. Es wurde bei jedem Krystallprisma an drei Stellen (in der Mitte und in der Nähe des linken und rechten Randes) beobachtet, um die Ungleichförmigkeit der Compression möglichst zu eliminiren;¹⁾ ferner

1) Das arithmetische Mittel aus den an jenen drei Stellen beobachteten Verzögerungen ist natürlich nur dann der wahre, dem in Rechnung

wurden an jeder Stelle die Messungen bei zwei um 90° verschiedenen Stellungen der Nicols und bei zwei verschiedenen Belastungen ausgeführt, und zwar wurden vor der Compression, bei jenen zwei Belastungen und nach Entlastung je acht Einstellungen des schwarzen Streifens gemacht. Endlich wurde jede solche Beobachtungsreihe, die nahe an 200 Einstellungen erforderte, noch einmal oder mehrmals nach neuer Aufstellung des Krystallprismas wiederholt.

C. Messung der absoluten Verzögerungen. Hierbei wurde die schon mehrfach, z. B. von Neumann, benutzte, auf der Verschiebung von Beugungsstreifen beruhende Methode angewandt. Das einfallende Licht ging zunächst durch ein Spaltröhr und dann durch zwei nahezu gleich dicke Krystallplatten, welche so nebeneinander standen, dass sowohl ihre Vorder- und Hinterflächen als die Schwingungsrichtungen der hindurchgehenden Lichtwellen parallel waren; um in dieser Stellung erhalten zu werden, waren dieselben zwischen zwei durch Gummiringe zusammengehaltene Glasstreifen gelegt. Diejenige von diesen Krystallplatten, welche comprimirt werden sollte, war in der früher beschriebenen Weise aufgestellt, während die andere, welche zur Compensation des Gangunterschiedes diente, oben und unten frei war. Die beiden aus den Krystallplatten austretenden parallelen Lichtbündel fielen auf die beiden verticalen, circa 1 mm breiten Beugungsspalten; letztere waren in einem gegenseitigen Abstände von $8\frac{1}{4}$ mm in einem Stanniolschirm angebracht, welcher auf einem auf dem Holzklotz stehenden Tischchen aufgestellt war. Da bei dem beträchtlichen gegenseitigen Abstände der Spalten, welcher wegen der Aufstellung der Krystallprismen neben einander nothwendig war, die Beugungsstreifen zu gedrängt und fein geworden wären, so wurde hinter dem Beugungsschirme eine Doppelglasplatte aufgestellt, durch welche die aus den Spalten austretenden Lichtbündel einander genähert wurden. Diese Doppelplatte war von Reinfelder und Hertel in München aus einer vollkommen planparallel geschliffenen Glasplatte von

gebrachten Drucke p entsprechende, Werth, wenn der auf die Endflächen des Prismas ausgeübte Druck eine lineare Function der Coordinaten ist; meistens war letzteres annähernd der Fall.

10 mm Dicke hergestellt und bestand aus zwei unter rechtem Winkel zusammenstossenden Theilen, deren Berührungsfläche vertical und parallel den zwei einfallenden Strahlenbündeln gestellt wurde, und zwar so, dass letztere die zwei Theile der Doppelplatte in gleichen Entfernungen von der Berührungsfläche trafen. Das Tischchen, welches die Doppelplatte und den Beugungsschirm trug, war mittelst einer feinen Schraube drehbar; man konnte daher durch die bei der Drehung wie ein Jamin'scher Compensator wirkende Doppelplatte den geringen Gangunterschied, welchen die beiden Strahlenbündel nach dem Durchgang durch die Krystallplatten auch vor der Compression der einen meistens besaßen, wieder aufheben, was für die Beobachtung mit weissem Lichte durchaus nothwendig war. Nach dem Durchgang durch die Doppelglasplatte hatten die homologen Strahlen der beiden Bündel einen gegenseitigen Abstand von ca. 1,4 mm und traten so in das Beobachtungsfernrohr ein; der Winkelabstand zweier benachbarter dunkler Streifen des Diffractionsbildes musste daher für Natriumlicht $4\frac{1}{3}$ betragen. Das Fernrohr war mittelst einer Mikrometerschraube um eine verticale Axe drehbar; einem Umgange der in 100 Theile getheilten Trommel entsprach eine Drehung von circa $10'$. — Um eine genügende Intensität zu erhalten, waren die Beugungsspalten über 1 mm breit gemacht, weshalb das helle Mittelbild des primären Beugungsspectrums nur zwei secundäre dunkle Streifen enthielt. Aus demselben Grunde musste mit weissem Lichte beobachtet werden, und zwar wurde eine Argandlampe benutzt. Es wurde immer einer der beiden mittelsten nahezu ganz schwarzen Streifen auf das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres eingestellt, und zur Ermittlung der einer Wellenlänge entsprechenden Drehung der Winkelabstand jener beiden Streifen gemessen. In Betreff der in Rechnung zu bringenden Wellenlänge herrschte daher eine gewisse Unsicherheit; es zeigte sich jedoch durch Vergleichung der absoluten Verzögerungen zweier Wellen mit deren mittelst des Compensators gemessenen relativen Verzögerung, dass man bei der Berechnung mit genügender Genauigkeit die Wellenlänge des Natriumlichtes benutzen konnte. Der Streifenabstand war, wahrscheinlich wegen verschiedener Stellung der Doppelglasplatte, nicht constant und musste da-

her nach jeder Beobachtungsreihe neu bestimmt werden; die Messung desselben war übrigens erheblich unsicherer, als diejenige der Verschiebung der Streifen beim Comprimiren der Krystallplatten. — Da eine ganz geringe Drehung der Doppelglasplatte schon einen sehr bedeutenden Gangunterschied der beiden Strahlenbündel hervorrief, so mussten während der Beobachtungen alle Erschütterungen sorgfältig vermieden werden. Es wurde daher auch nach jeder Beobachtungsreihe durch besondere Versuche diejenige Verschiebung der Beugungstreifen ermittelt, welche etwa infolge der mit dem Belasten und Entlasten des Hebels verbundenen Veränderung der Wirkung des Gewichtes auf den Holzklötz und auf die Stellung der Doppelplatte eintreten konnte; diese Verschiebung erwies sich jedoch immer als sehr gering. — Eine Hauptschwierigkeit bei den Messungen der absoluten Verzögerungen bestand darin, dass die gegenüberliegenden Flächen der zu untersuchenden Krystallparallelepipeda niemals vollkommen parallel waren, und dass ihre gegenseitige Neigung, die meistens einige Minuten betrug, bei keinem Paare der vorhandenen Prismen genau gleich gross war. Hierdurch wurde die Deutlichkeit der Beugungstreifen sehr beeinträchtigt, und mit mehreren Prismen konnten überhaupt keine solchen erhalten werden.

Entsprechend den beiden sich in den Krystallprismen fortpflanzenden Wellen erhält man bei doppeltbrechenden Krystallen von vornherein, bei einfachbrechenden nach der Compression zwei senkrecht gegeneinander polarisirte Beugungsspectren. Um dieselben zu trennen oder, wenn sie nicht übereinander fielen, möglichst deutlich zu machen, wurde vor das Ocular des Fernrohres ein als Analysator dienendes Nicol'sches Prisma gestellt. Damit die Verzögerung an verschiedenen Stellen des comprimirten Prismas gemessen werden konnte, ohne dass das Tischchen mit dem Beugungsschirme seitlich verschoben werden musste, wurde zwischen den Krystallprismen und dem Beugungsschirme eine dicke gut planparallel geschliffene Glasplatte aufgestellt, durch deren Drehung um eine verticale Axe die beiden durch die Krystallprismen hindurchgegangenen Strahlenbündel beliebig seitlich verschoben werden konnten. Bei jedem Prisma (und womöglich auf jedem Flächenpaare desselben) wurde an drei Stellen (linker Rand, Mitte, rechter Rand) beobachtet,

und zwar wurde der Hebel je fünf- bis sechsmal abwechselnd belastet und entlastet, wobei wieder jedesmal fünf Einstellungen gemacht wurden. Nachdem für eine Stelle des Prismas und für eine Stellung des Analysators diese Beobachtungsreihe vollendet war, wurde immer der Streifenabstand gemessen. Es wurde hier nur eine Belastung angewandt, da diese Beobachtungen sehr zeitraubend waren, und da auch die Proportionalität der Verzögerungen mit dem Drucke durch die Compensatorbeobachtungen hinreichend erwiesen zu sein schien.

Die Verschiebung der Beugungsstreifen bei der Compression der Krystallprismen geschah in allen Fällen in demjenigen Sinne, welcher (wie an der Richtung der durch eine Drehung der Doppelglasplatte verursachten Verschiebung erkannt wurde) einer Verzögerung entsprach. — Bezeichnet man die durch den Streifenabstand dividirte Verschiebung, welche durch den Druck p verursacht wird, mit δ , so ist

$$(23) \quad \delta = \frac{D^0 p n^0{}^3}{2\lambda} \cdot \frac{\omega^0{}^2 - \omega^2}{p v^2} + \frac{D - D^0}{\lambda} (n^0 - 1),$$

wobei die Bezeichnungen die früher erläuterten sind und auch dieselbe Vernachlässigung gemacht ist.

In denjenigen Fällen, wo ausser den absoluten Verzögerungen δ_1, δ_2 der beiden Wellen auch durch Beobachtungen mit dem Compensator die relative Verzögerung $\Delta = \delta_1 - \delta_2$ bestimmt war, wurden $(\omega_1^0{}^2 - \omega_1^2)/p v^2$ und $(\omega_2^0{}^2 - \omega_2^2)/p v^2$ aus dem auf letztere Weise gefundenen Werthe von $\delta_1 - \delta_2$ und dem Verhältniss $\delta_1 : \delta_2$ berechnet, weil dadurch die oben erwähnte zweifelhafte Verfügung über λ vermieden wird. Man erhält dann zur Berechnung von $C' = (\omega_1^0{}^2 - \omega_1^2)/p v^2$ und $C'' = (\omega_2^0{}^2 - \omega_2^2)/p v^2$ die Gleichungen:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} C' n_1^0{}^3 - C'' n_2^0{}^3 = \frac{2}{D^0 p} \{ \lambda \Delta - (D - D^0)(n_1^0 - n_2^0) \}, \\ C' n_1^0{}^3 \delta_2 - C'' n_2^0{}^3 \delta_1 = \frac{2(D - D^0)}{D^0 p} \{ \delta_1 (n_2^0 - 1) - \delta_2 (n_1^0 - 1) \}. \end{array} \right.$$

Statt $D^0 p$ kann auch P/B gesetzt werden, wo B die mittlere Breite des Krystallprismas und P der gesammte auf letzteres wirkende Druck ist; bezeichnet Q das angehängte Gewicht, so ist $P = 120/29,5 \cdot Q$.

D. Bestimmung der Schwingungsrichtungen. Bei einigen Platten musste nach der Theorie in Folge der Compres-

sion eine Drehung der Schwingungsrichtungen eintreten. Um diese zu beobachten, wurde vor und nach der Belastung der wie bei den Compensatorbeobachtungen angebrachte Polarisator so eingestellt, dass bei jeder Stellung des Analysators die Krystallplatte möglichst gleich hell erschien, wie das Gesichtsfeld neben derselben. Diese Einstellung liess sich bis auf etwa 3' genau ausführen; sie wurde bei jeder Platte unter verschiedenen Umständen, z. B. bei verschiedenen Aufstellungen der Platte, wiederholt. Es wurde dabei theils Natriumlicht, theils das weisse Licht einer Argandlampe benutzt. — Bei den Flussspathprismen wurden die Schwingungsrichtungen nach der Compression durch Einstellung des Polarisators auf grösste Dunkelheit bestimmt.

E. Beobachtung der Interferenzcurven im convergenten Lichte. Diese Beobachtungsmethode wurde hauptsächlich bei senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Quarzplatten angewandt und diente nur zur Controlle der Compensatormessungen. Ausgeführt wurden diese Beobachtungen mit einem Nörremberg'schen Apparate, in welchem ein Ocularmikrometer zur Messung der Durchmesser der Interferenzcurven angebracht war, die Krystallplatte stand in der gewöhnlichen Weise unter dem Hebel, und es wurden die Durchmesser der zwischen gekreuzten Nicols sichtbaren schwarzen Interferenzcurven vor und nach der Compression gemessen. Dabei ist der am Ocularmikrometer abgelesene Durchmesser d proportional dem sinus des wahren, in Winkelmaass ausgedrückten Halbmessers ϑ , also $d = \rho \sin \vartheta$, wo ρ eine Constante ist, welche sich aus der Dicke und den Brechungscoefficienten der Platte und aus den vor der Compression gemessenen Durchmessern berechnen lässt.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

IX. Leitungsfähigkeit gelatinehaltiger Zinkvitriollösungen; von Ch. Lüdeking.¹⁾

Im Jahre 1883 hat Hr. Eilh. Wiedemann²⁾ nach Versuchen mit Lösungen von Zinksulfat in Wasser und Glycerin

1) Mitgetheilt vom Hrn. Verfasser aus den Berichten der St. Louis Academy.

2) E. Wiedemann, Wied. Ann. 20. p. 537. 1883.

nachgewiesen, dass keine Proportionalität zwischen Reibungs- und Leitungswiderstand besteht. Bei einer Lösung von Zinkvitriol in Wasser und Glycerin verhielten sich die Reibungswiderstände wie 1:68,7, die Leitungswiderstände wie 1:12,1. Im Anschluss an diese Versuche habe ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Eilh. Wiedemann auch das Verhalten von Zinkvitriol, der in mehr oder weniger concentrirter Gelatine enthalten war, bei verschiedenen Temperaturen untersucht. Durch Aenderung meines Wohnortes ist die Publication der Resultate verzögert worden. Indess wird eine Mittheilung derselben auch nach den inzwischen erfolgten Arbeiten von Hrn. Arrhenius¹⁾ und Hrn. B. v. Tietzen-Hennig²⁾ nicht ganz überflüssig erscheinen. Meine Beobachtungen erstrecken sich auf Lösungen von weit höherem Gehalt an Gelatine. Die benutzten Lösungen enthielten 25 und 50 Proc. Gelatine und 2, 5,4 und 10 Proc. Zinksulfat. Die Gemische von bestimmtem Gehalt an Zinkvitriol, Wasser und Gelatine wurden in folgender Weise hergestellt.

In einem Becherglase wurde zunächst die Gelatine abgewogen und die zur Herstellung einer bestimmten Lösung nöthige Wassermenge beigelegt. Dann wurde die Lösung in einem Salzbad gekocht und die erforderliche Menge Salz zugefügt. Die durch Verdampfen verlorene Wassermenge wurde wieder ersetzt. Um z. B. eine 50procentige Gelatinelösung mit 10 Proc. $\text{ZnSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$ zu bekommen, mischte man 200 g Gelatine mit 160 g Wasser, denen man nach der Lösung 40 g $\text{ZnSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$ zusetzte. Nach der vollkommenen Lösung wurde dann das Ganze nahe auf 400 g gebracht.

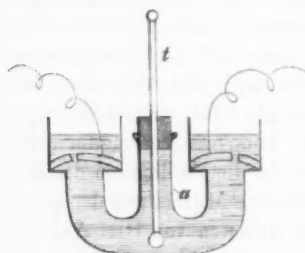
Die Leitungsfähigkeit jeder der sechs Lösungen wurde mit der einer wässerigen von gleicher Concentration verglichen, die auf constanter Temperatur erhalten wurde. Die Messungen wurden hier zwischen ca. 5° und 90° angestellt.

Zum Messen diente ein Kohlrausch'sches Universalrheometer und ein Wiedemann'sches Galvanometer. Der Strom wurde nur kurz geschlossen und oft in entgegengesetzter Richtung durch die Lösungen geschickt. Die Lösungen waren

1) Arrhenius, Översigt af kgl. Vetensk. Akad. Forhandl. 1885. p. 121.

2) B. v. Tietzen-Hennig, Wied. Ann. 35. p. 467. 1888.

in Gefäßen von beistehender Form enthalten. Sie ist eine kleine Modification der Kohlrausch'schen, gestattet aber,



die Temperatur der untersuchten Substanz mittelst des durch die Röhre *a* eingeführten Thermometers *t* direct zu bestimmen.

Es ist dies bei so wenig beweglichen Substanzen in hohem Grade wünschenswerth, da sich bei ihnen die Temperatur nicht durch Strömungen ausgleichen kann. An dem oberen Theile

des Thermometers wurde gleichzeitig der Apparat mittelst einer Klammer in der Flüssigkeit festgehalten.

Die folgenden Tabellen enthalten die erhaltenen Resultate. Die Zahlen geben das Verhältniss der Leitungsfähigkeiten der untersuchten Lösung zu einer ebenso concentrirten in reinem Wasser bei 20° C. an. Da keine Wechselströme zur Anwendung kamen, so dienten als Electroden amalgamirte Zinkplatten.

Aus diesen Werthen wurden dann durch graphische Interpolation die folgenden für die Leitungsfähigkeiten *k* bei 5, 10, 15, 20, 30° etc. abgeleitet.

Die Tabelle enthält dieselben:

<i>t</i>	2% ZnSO ₄ + 7 H ₂ O			5,4% ZnSO ₄ + 7 H ₂ O				10% ZnSO ₄ + 7 H ₂ O		
	Was- ser +	25% Gelat.	50% Gelat.	Was- ser +	10% Gelat.	25% Gelat.	50% Gelat.	Was- ser +	25% Gelat.	50% Gelat.
5	0,741	0,469	—	0,757	0,562	0,305	0,143	0,617	0,303	—
10	0,869	0,555	—	0,877	0,645	0,368	0,181	0,729	0,378	—
15	0,990	0,653	—	0,990	0,769	0,424	0,207	0,847	0,441	0,129
20	1,111	0,735	0,167	1,111	0,877	0,490	0,239	0,943	0,495	0,151
30	1,351	0,892	0,227	1,316	1,075	0,609	0,322	1,149	0,613	0,188
40	1,666	1,099	0,301	1,562	1,266	0,751	0,405	1,370	0,741	0,227
50	1,923	1,351	0,388	1,818	1,515	0,892	0,493	1,562	0,877	0,287
60	2,174	1,587	0,490	2,000	1,666	1,020	0,575	1,724	1,000	0,338
70	2,381	1,786	0,585	2,174	1,786	1,111	0,654	1,887	1,087	0,400
80	2,500	1,961	0,683	2,272	1,923	1,190	0,735	2,000	1,205	0,446
90	2,572	2,127	0,725	2,381	2,000	1,250	0,787	2,000	1,282	0,476

Für die Aenderungscoefficienten $\alpha_1 = (K_{90} - K_{20}) / K_{20}$ ergeben sich hieraus noch folgende Werthe:

	2% ZnSO_4 + 7 H_2O			5,4% ZnSO_4 + 7 H_2O				10% ZnSO_4 + 7 H_2O		
	Was- ser +	+25% Gelat.	+50% Gelat.	Was- ser +	+10% Gelat.	+25% Gelat.	+50% Gelat.	Was- ser +	+25% Gelat.	+50% Gelat.
α_1	1,315	1,894	3,341	1,143	1,280	1,551	2,293	1,121	1,589	2,152

Eine Vergleichung der von mir gefundenen Aenderung der Leitungsfähigkeit meiner concentrirtesten Lösung mit der von Beetz¹⁾ bei seiner verdünntesten Lösung beobachteten, die einander am nächsten stehen, zeigt eine sehr gute Uebereinstimmung bis zu etwa 60°. Bei höheren Temperaturen werden die Abweichungen grösser, wie dies auch nach den Bemerkungen von Beetz sein muss.

Aus den Aenderungscoefficienten ergibt sich Folgendes:

Die Zahlen, welche die Abhängigkeit des Leitungsvermögens von der Temperatur darstellen, sowie auch die graphische Darstellung derselben zeigt, dass an der Stelle, wo die Gelatine aus dem festen in den flüssigen Zustand übergeht, selbst bei Lösungen mit sehr grossem Gelatinegehalt keine sprunghafte Aenderung eintritt.

Die Aenderung der Leitungsfähigkeit mit der Temperatur ist um so grösser, je mehr Gelatine die Lösung enthält. Der Einfluss des Zusatzes an Gelatine verändert sich aber bei steigendem Gehalt an Zinkvitriol.

Das zweite Resultat steht mit dem von Arrhenius erhaltenen im Widerspruch, dass die Aenderungscoefficienten unabhängig von dem Gelatinegehalt sind. Der Grund für die abweichenden Resultate liegt darin, dass Arrhenius nur Lösungen mit sehr geringem Gelatinegehalt untersucht hat.

Ich habe auch die Diffusionsgeschwindigkeit der untersuchten Zinkvitriollösungen in Gelatine bestimmt. Dabei haben sich ähnliche Resultate, wie bei den Versuchen von B. v. Tietzen-Hennig ergeben. Indess habe ich zunächst keine weiteren Schlüsse an dieselben anzuknüpfen gewagt, wie derselbe. Wir haben hier ein weit complicirteres Phänomen, als es auf den ersten Anblick scheint. Es diffundirt nämlich nicht allein Zink-

1) Beetz, Wied. Galv. 1. p. 328; Pogg. Ann. 117. p. 1. 1862; Wied. Ann. 7. p. 66. 1879.

vitriol in das in der Gelatine enthaltene Wasser, sondern auch Wasser aus der Zinkvitriollösung. Wie complicirt die Erscheinungen sind, lässt sich daraus entnehmen, dass, wenn man über eine concentrirte Gelatinelösung eine concentrirte Zinkvitriollösung schichtet, sich in der obersten Schicht der Gelatine Krystalle des Salzes abscheiden.

Ehe man daher die Versuche über Diffusion mit denen über electricische Leitungsfähigkeit numerisch in Verbindung bringen kann, müssen wohl diese Erscheinungen genauer verfolgt werden, womit ich eben beschäftigt bin.

X. Zur Erfindung der Pendeluhr; von W. Láska.

In diesen Annalen¹⁾ wird angeführt, dass das Verdienst der Entdeckung des Satzes:

„Innerhalb kleiner Ausschlagswinkel ist das Pendel isochron“, Galilei gebührt, und als Jahr der Entdeckung wird 1641 angegeben. Dagegen erlaube ich mir, auf Folgendes aufmerksam zu machen. Der Prager Professor Macrus Marci (nicht „medecin hongrois“, wie ihn Montucla Hist. des Math. Tom. II. p. 406 nennt) beweist diesen Satz in seiner „De proportionibus motus“ Pragae 1639 Propositio XXIV „Perpendicularum ex quodlibet puncto eiusdem circuli aequali tempore recurrit in suam stationem“ und wendet ihn zur Zeitmessung an in Parergon. Problema „Horologium construere, quod suo motu tempus numeret divisum in partes minores, quam tertias unius secundi“.

Prag, März 1889.

1) Gerland, Wied. Ann. 4. p. 585. 1878.